

# 量子コンピューティング と量子誤り訂正

のイントロ

阿部 英介

理化学研究所 量子コンピュータ研究センター

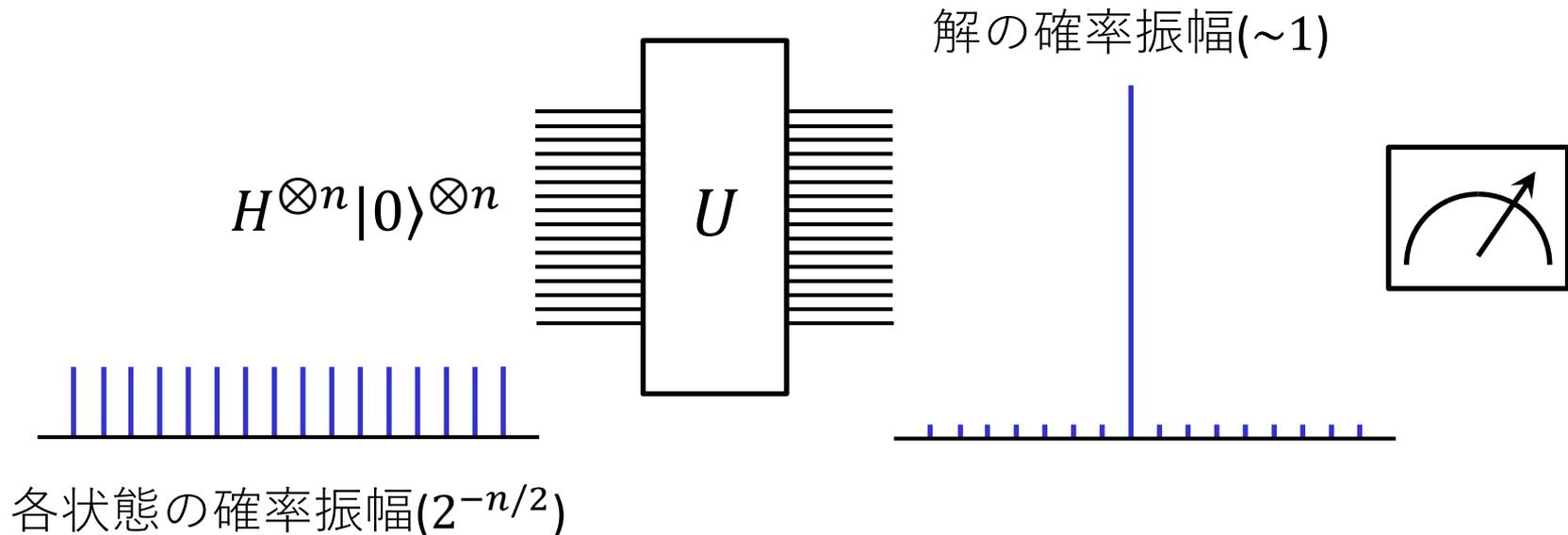
物理学特別講義@九州大学

2021年12月21日



# 量子アルゴリズム

- 重ね合わせ状態(量子並列性)から始めて、解の状態の確率振幅が大きくなるよう(量子干渉)にユニタリ変換し、最後に**測定**
- **ドイチェージョザ**、グローバー(データ検索)、**ショア**(素因数分解)...



# 量子コンピューティングの難しさ

実験

- 量子情報を**位相**に書き込み、**量子干渉**により解の状態を抜き出す  
→ 計算中に**位相コヒーレンス**を保つことが必要

- 量子状態は複製できない(**複製禁止定理**)  
→ **量子誤り訂正符号 & 誤り耐性量子計算**

(quantum error correction code)

(フォールトトレラント, fault tolerant)

# ディビンチェンゾの要請

Fortschr. Phys. 48, 771 (2000) DiVincenzo

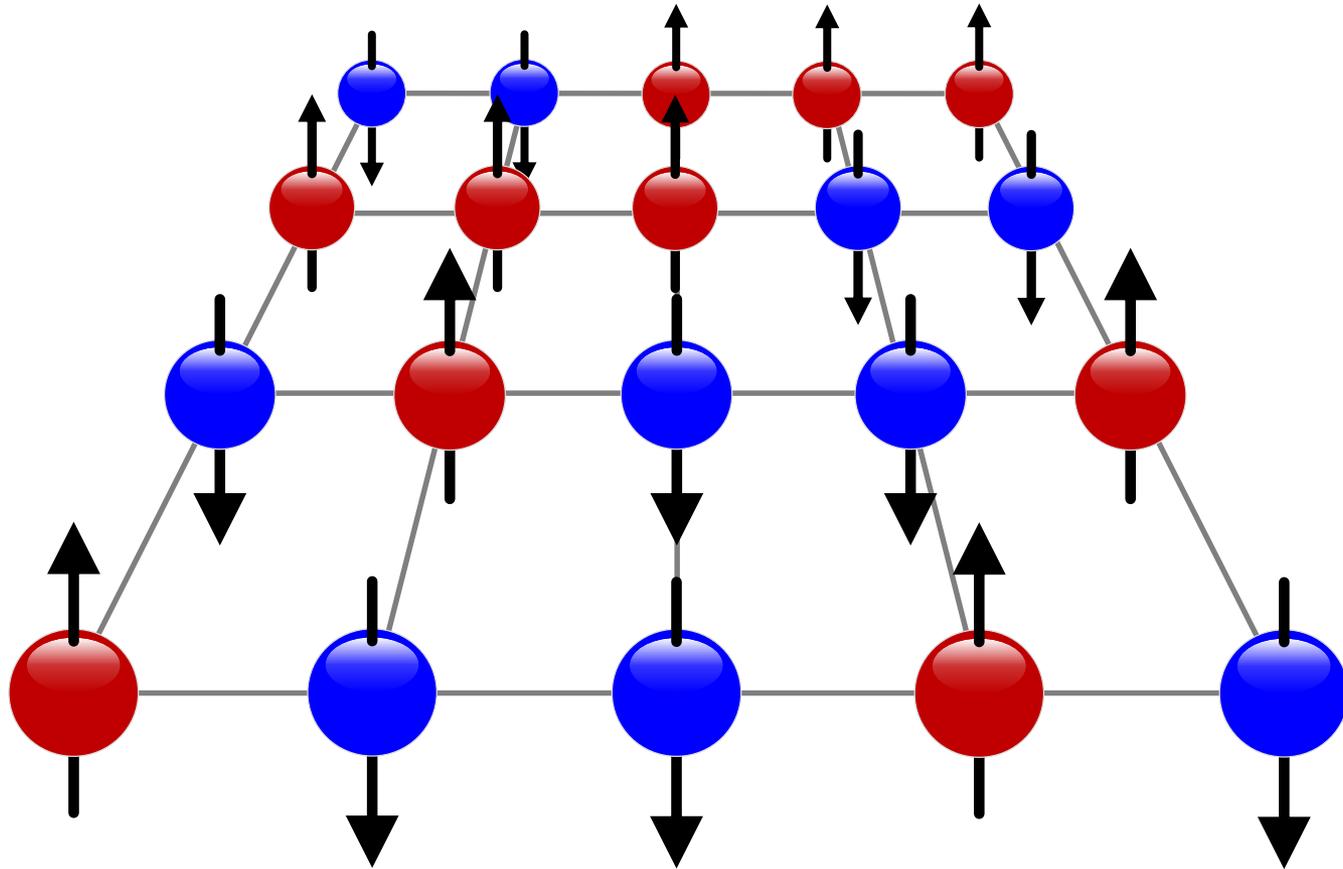
量子コンピューティングを実現する物理系に求められる条件

1. スケーラブルな量子ビット列
2. 初期化
3. 長いコヒーレンス時間( $T_2$ )
4. ユニバーサル量子ゲート
5. 射影測定



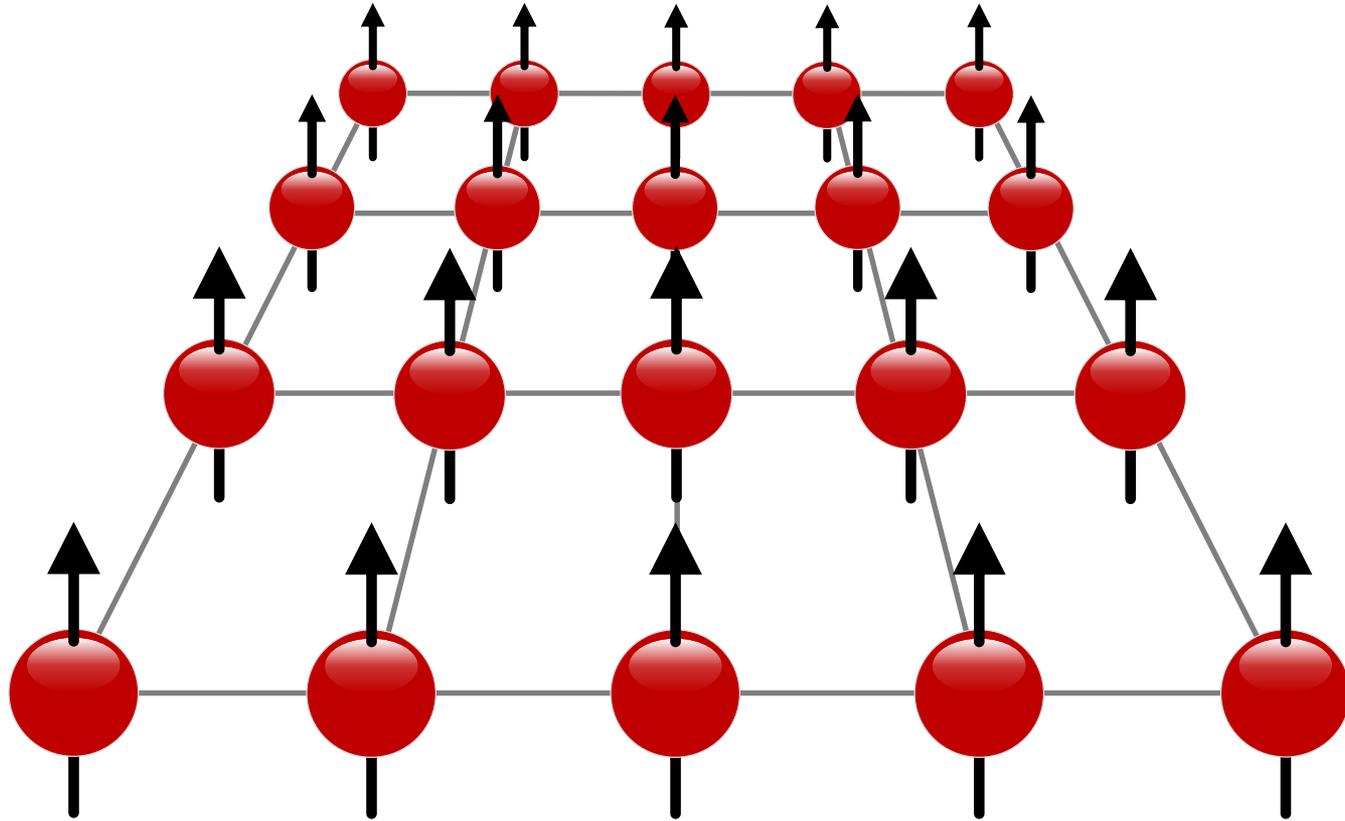
D. DiVincenzo

# 量子計算の流れ(イメージ)



1. スケーラブルな量子ビット列

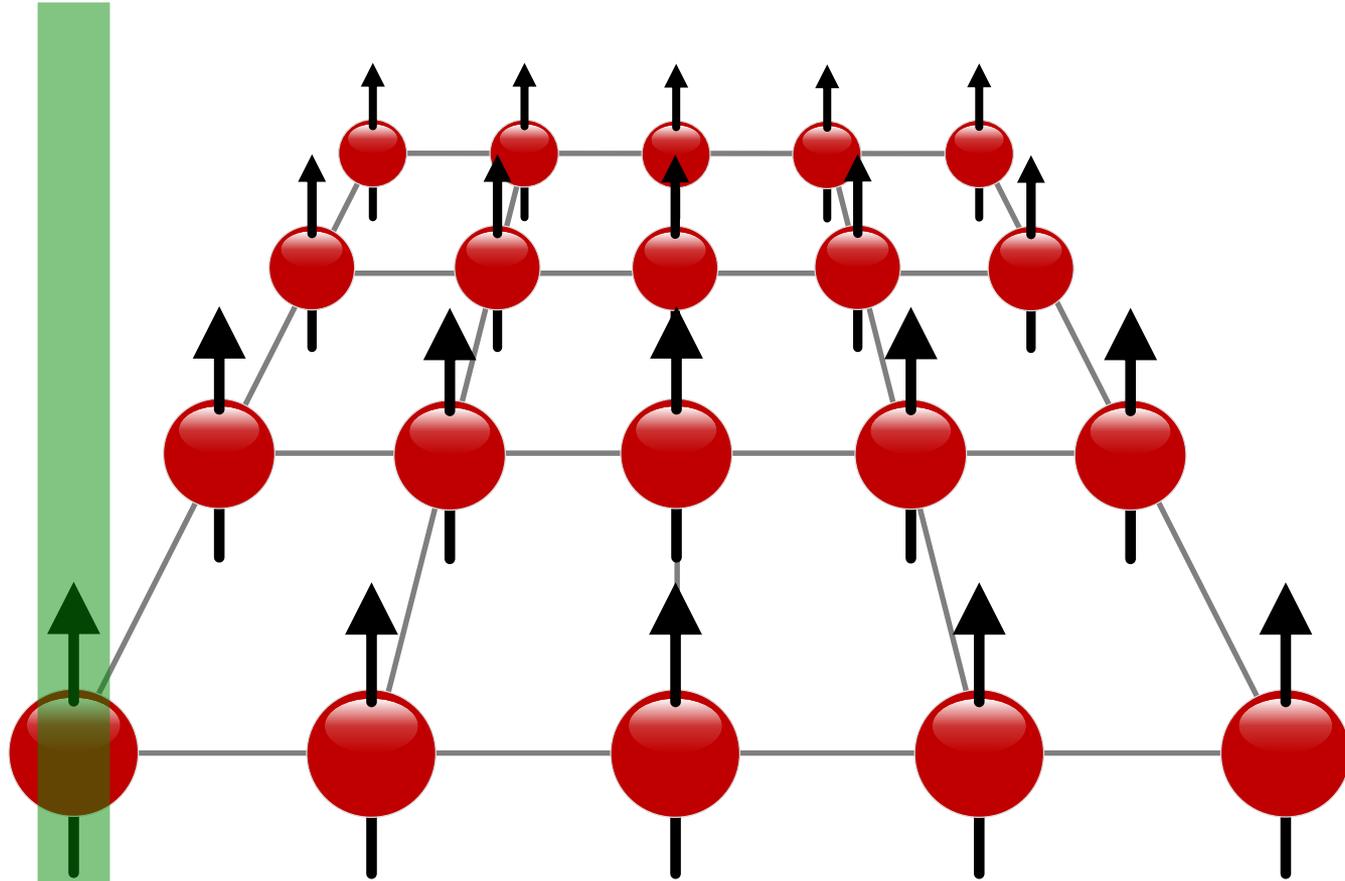
# 量子計算の流れ(イメージ)



2. 初期化  $|0\rangle^{\otimes n}$

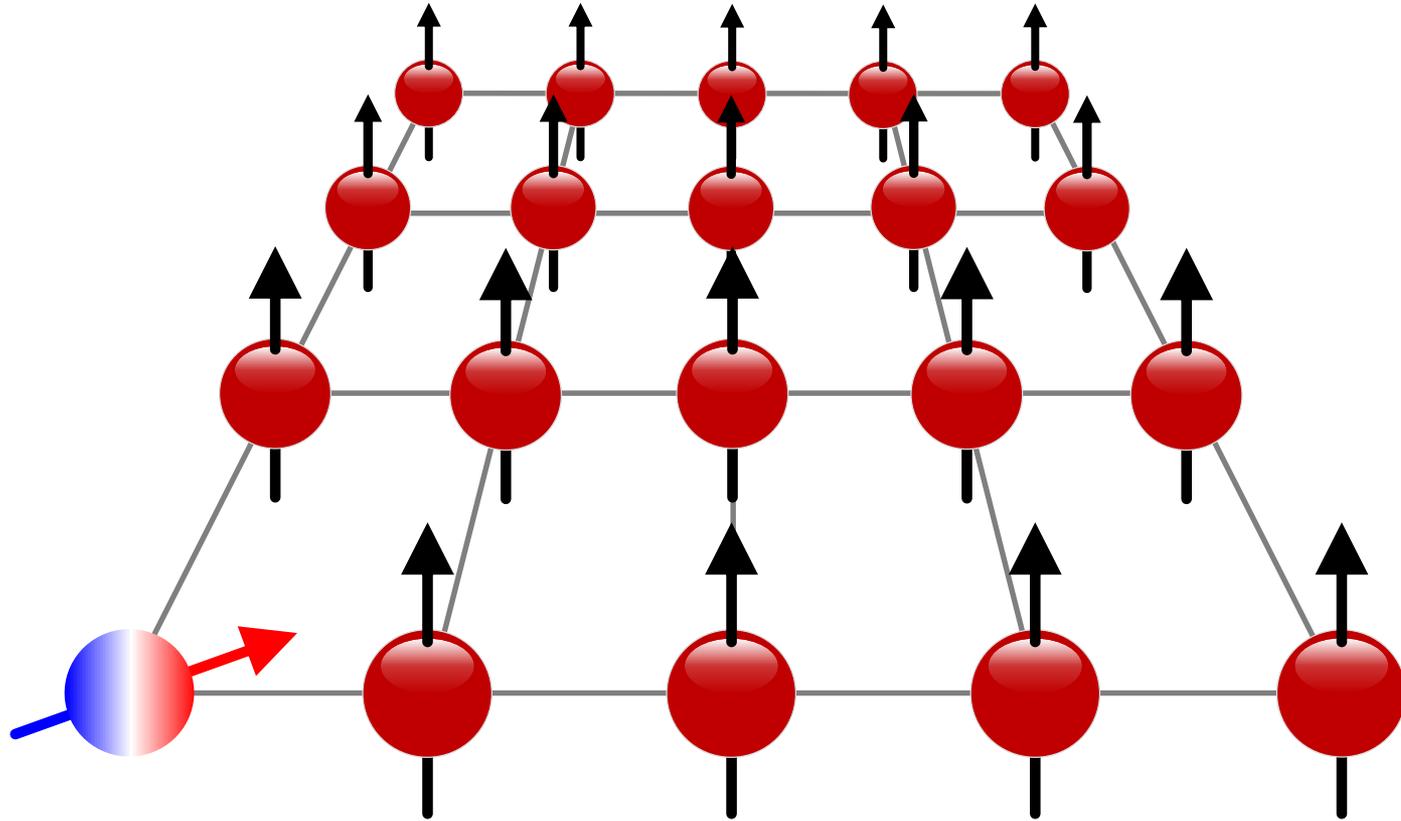
# 量子計算の流れ(イメージ)

レーザー、マイクロ波、電圧パルス...



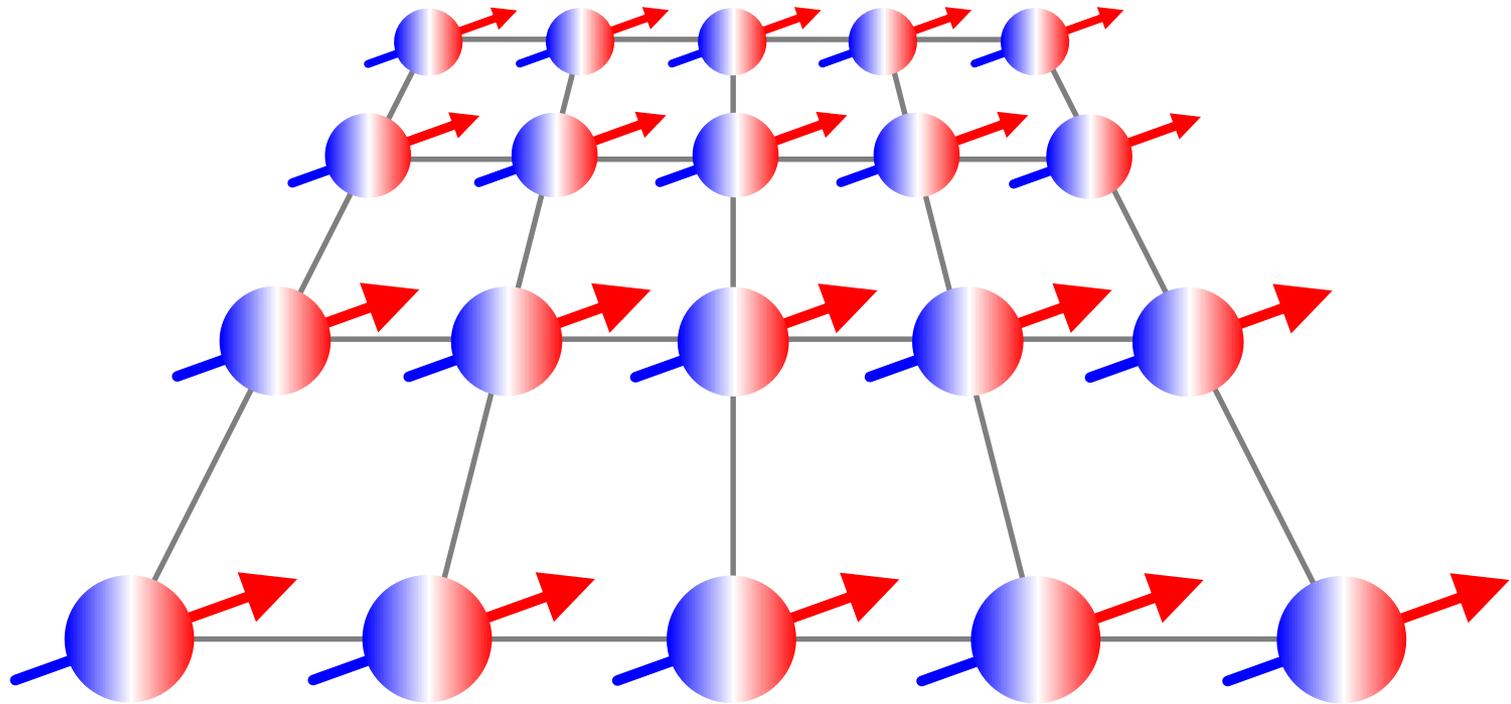
## 4.1. ユニバーサル量子ゲート(1Q)

# 量子計算の流れ(イメージ)



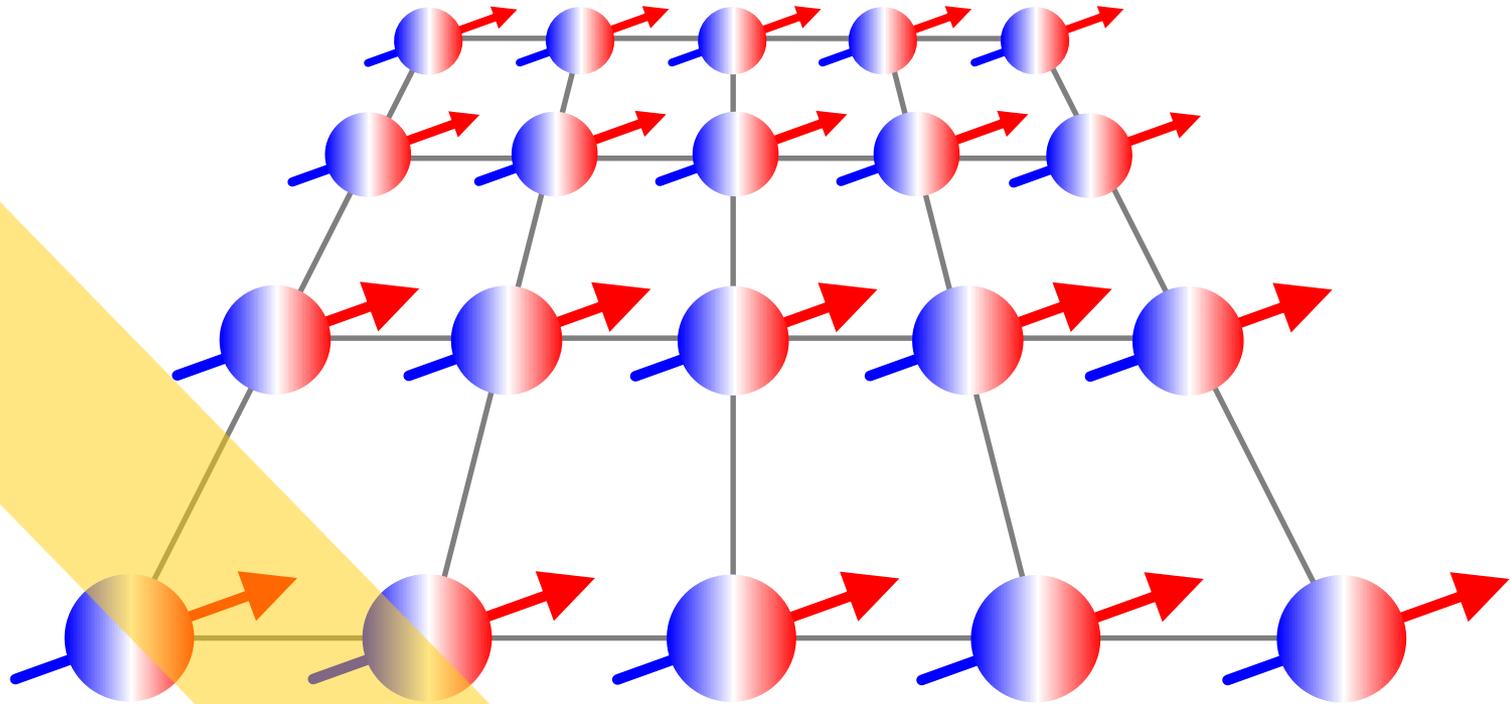
重ね合わせ状態生成

# 量子計算の流れ(イメージ)



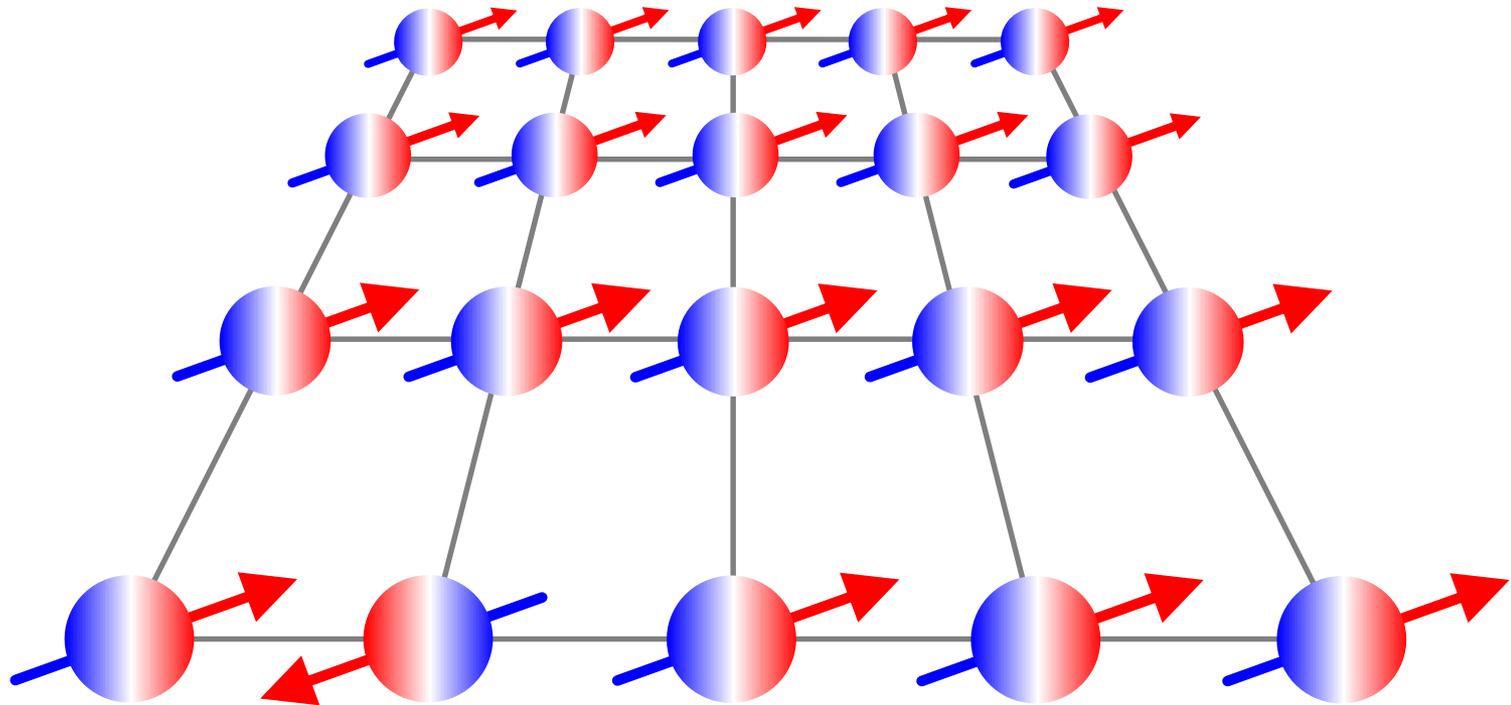
## 3. 長いコヒーレンス時間

# 量子計算の流れ(イメージ)



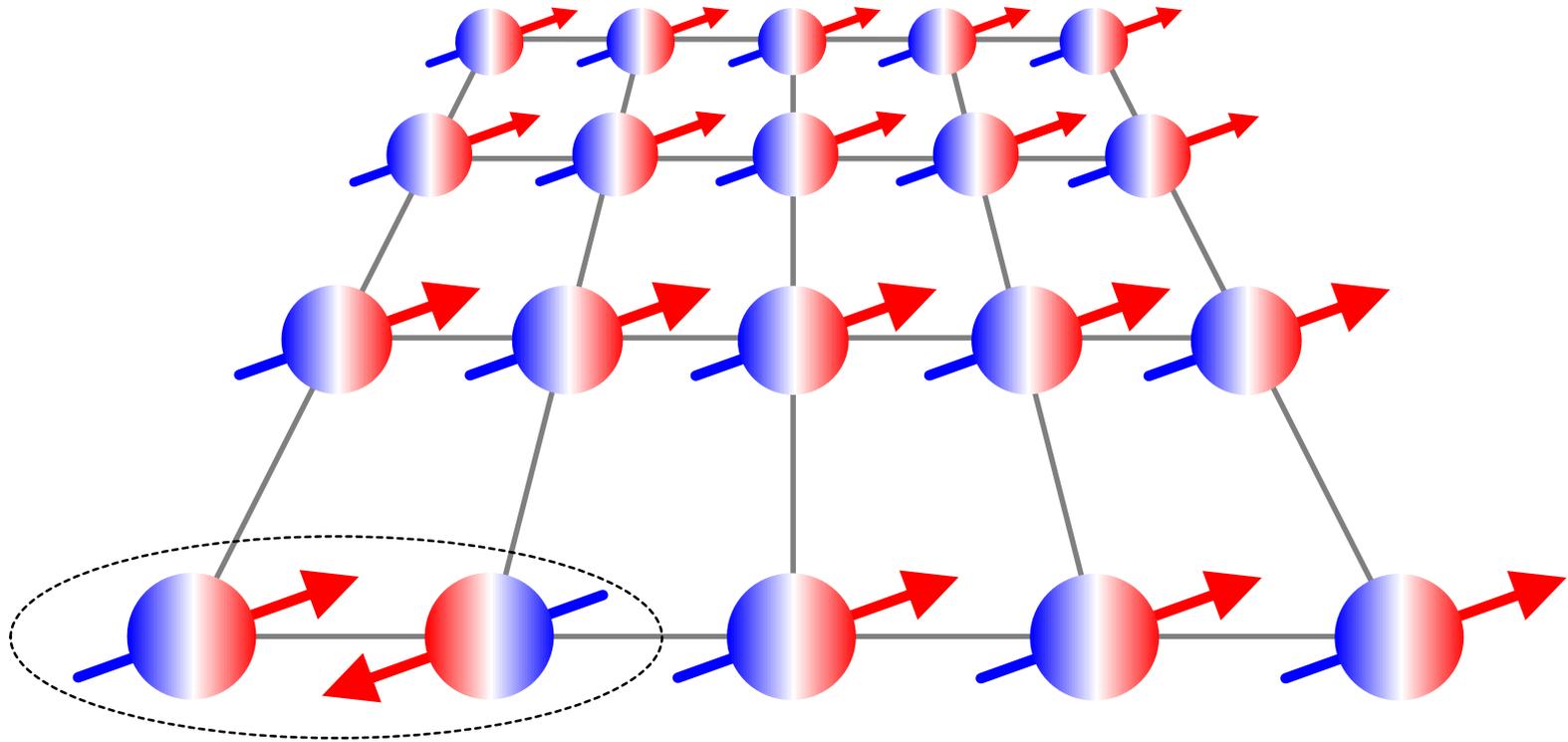
## 4.2. ユニバーサル量子ゲート(2Q)

# 量子計算の流れ(イメージ)



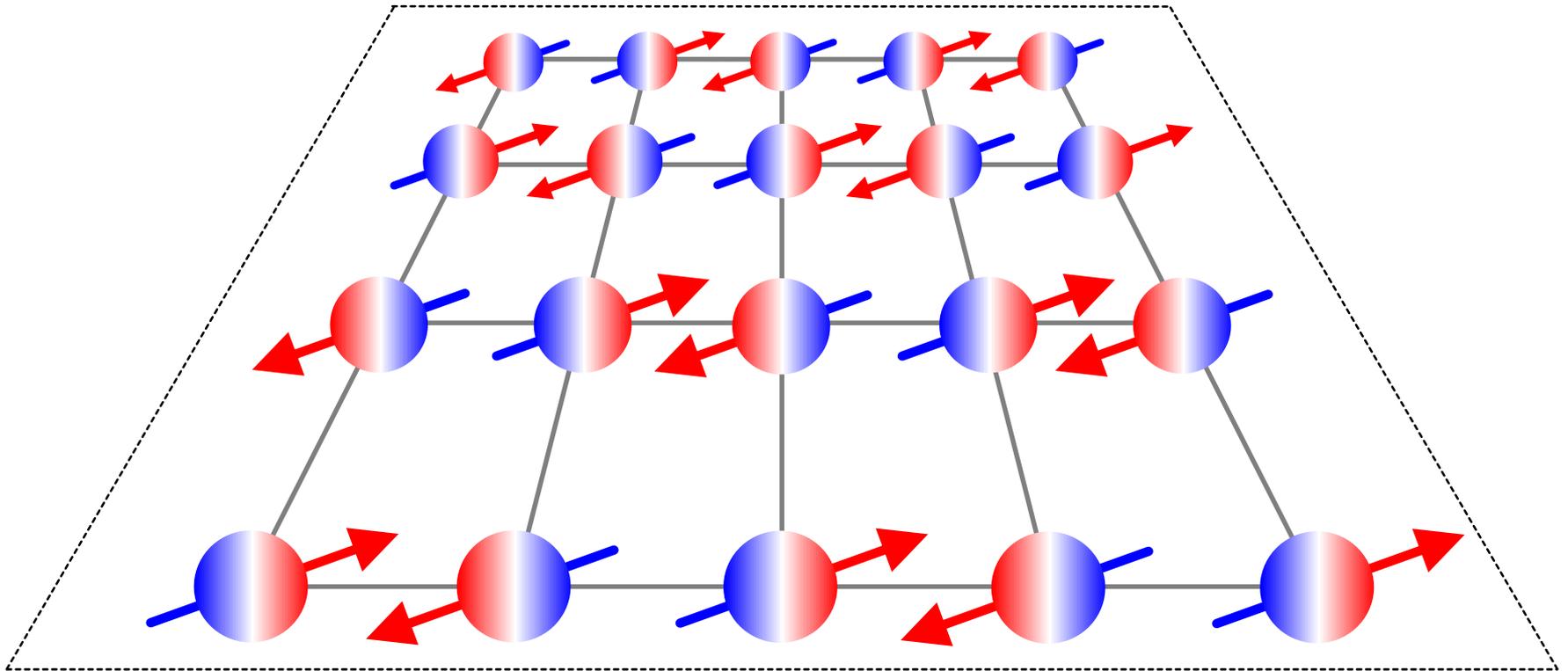
## 4.2. ユニバーサル量子ゲート(2Q)

# 量子計算の流れ(イメージ)



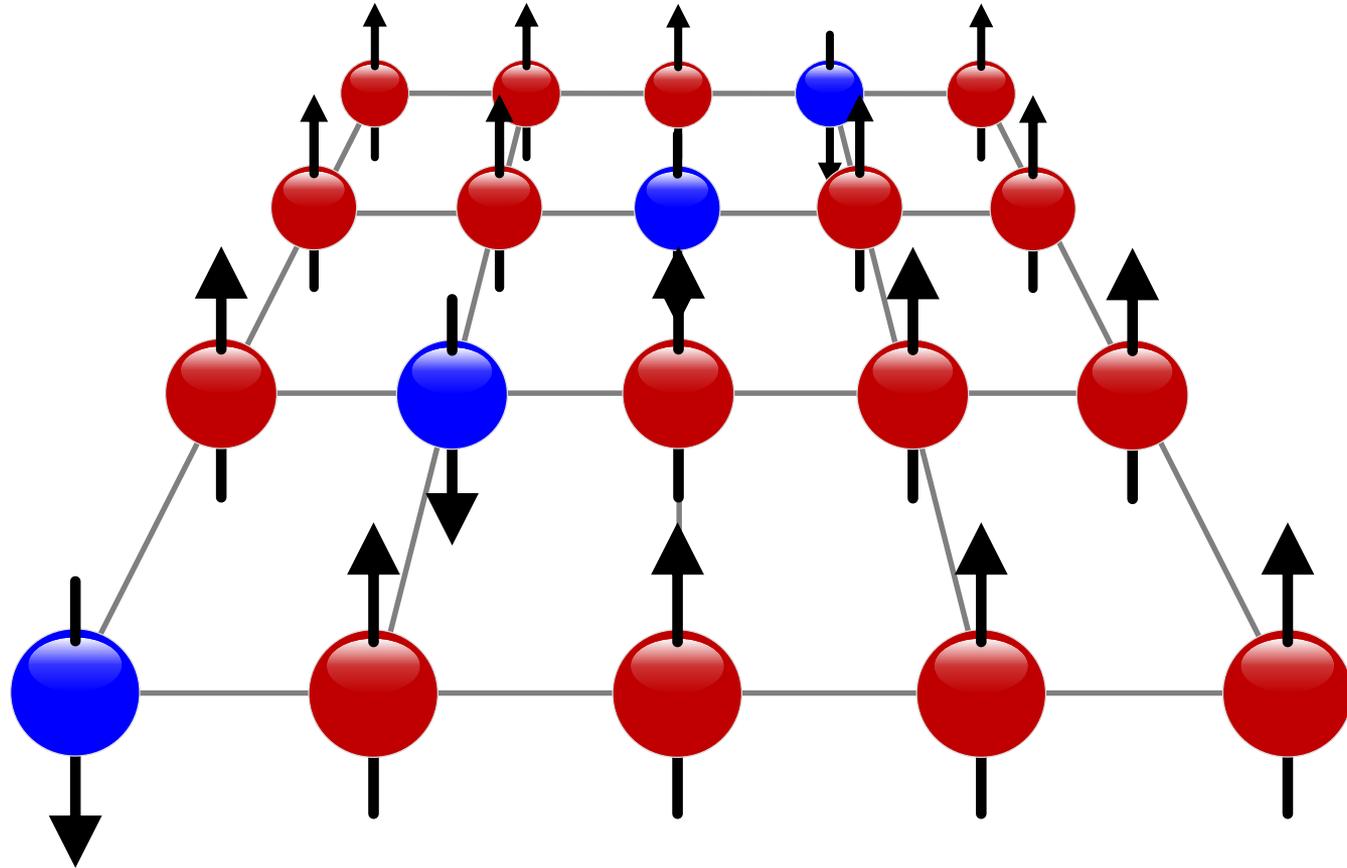
量子もつれ生成

# 量子計算の流れ(イメージ)



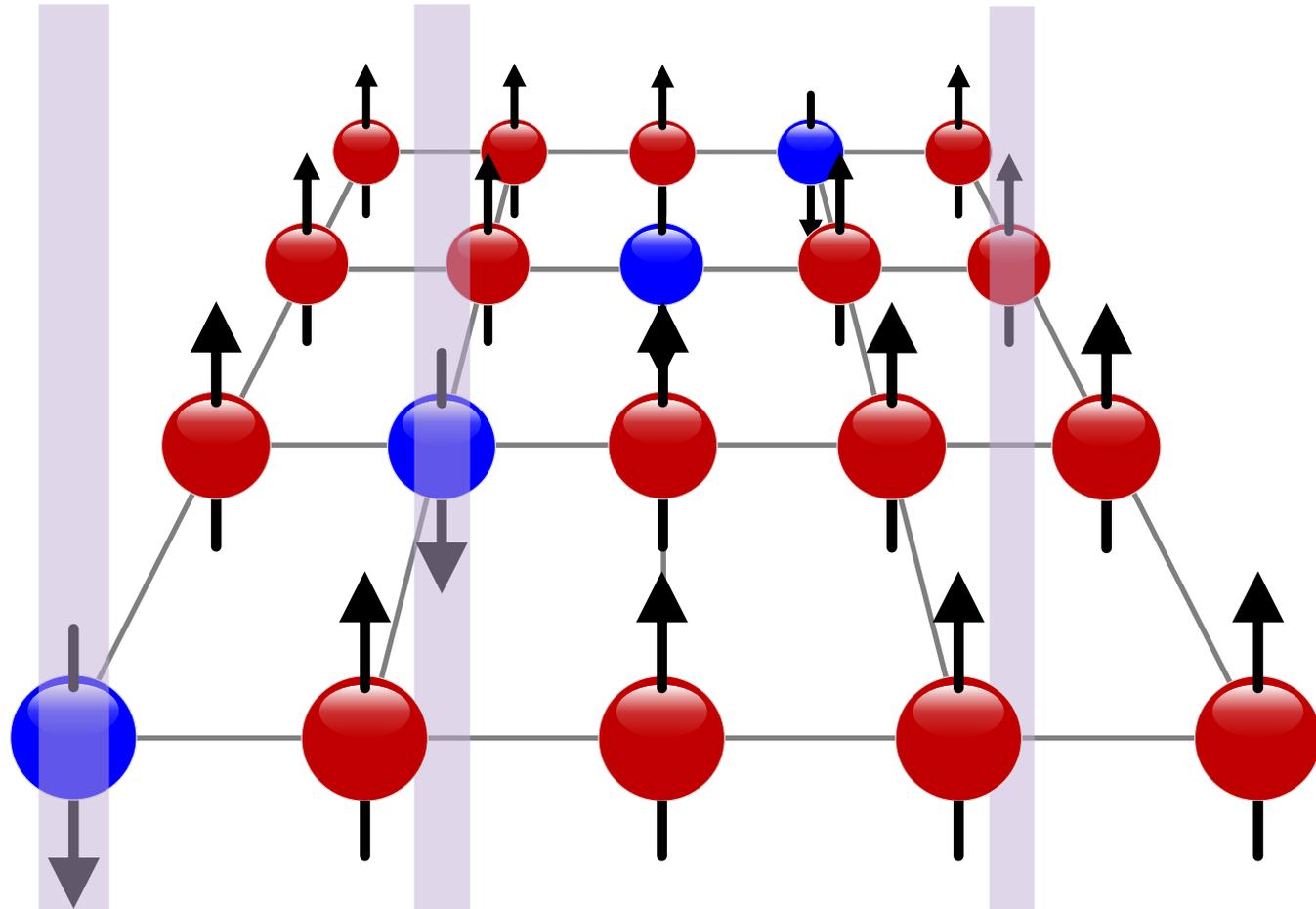
巨大な量子もつれ生成 → 量子アルゴリズム実行

# 量子計算の流れ(イメージ)



干渉効果

# 量子計算の流れ(イメージ)

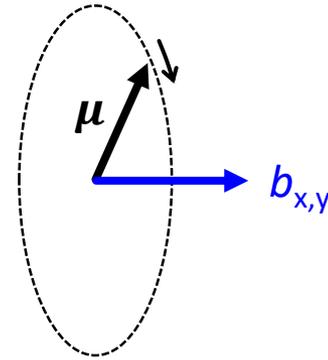


5. 測定

# 緩和時間: $T_1$ と $T_2$

ブロッホ方程式

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \gamma \mathbf{B}_0 - \frac{\mu_{\parallel} - \mu_0}{T_1} \hat{\boldsymbol{\mu}} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{\perp}}{T_2}$$



Felix Bloch  
(1905–1983)

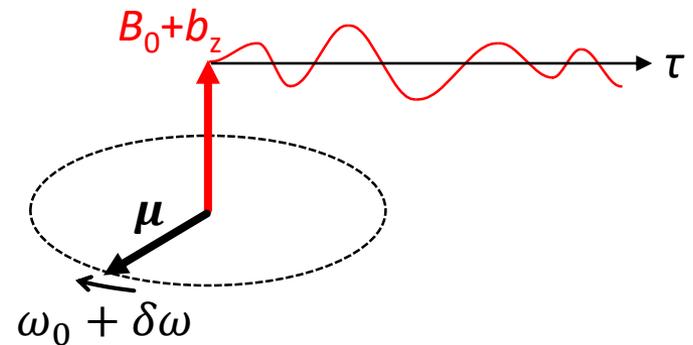
©Nobel Foundation

エネルギー緩和(スピンの向きを変える)

$$\frac{1}{T_1} = \frac{\gamma^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\langle b_x(\tau)b_x(0) \rangle + \langle b_y(\tau)b_y(0) \rangle] \cos(\omega_0\tau) d\tau$$

位相緩和(歳差速度を変える)

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{\gamma^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle b_z(\tau)b_z(0) \rangle d\tau$$

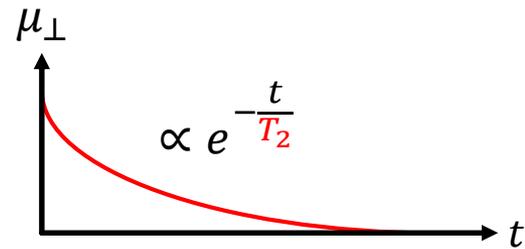
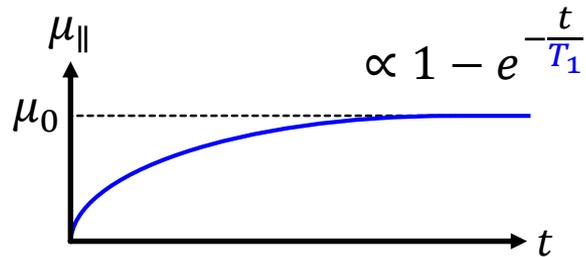


→ インコヒーレントな過程(エラー!)

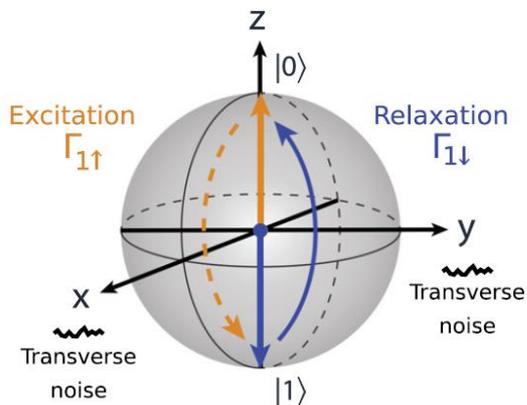
# 緩和時間: $T_1$ と $T_2$

## ブロッホ方程式

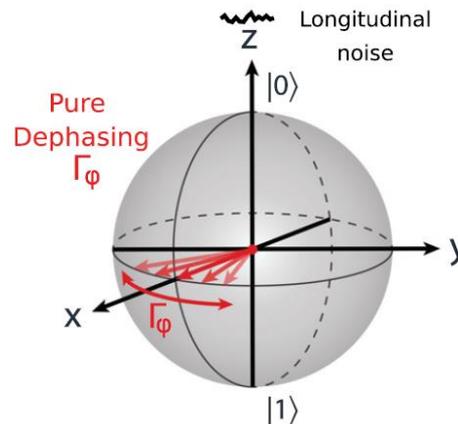
$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \gamma \mathbf{B}_0 - \frac{\mu_{\parallel} - \mu_0}{T_1} \hat{\mathbf{z}} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{\perp}}{T_2}$$



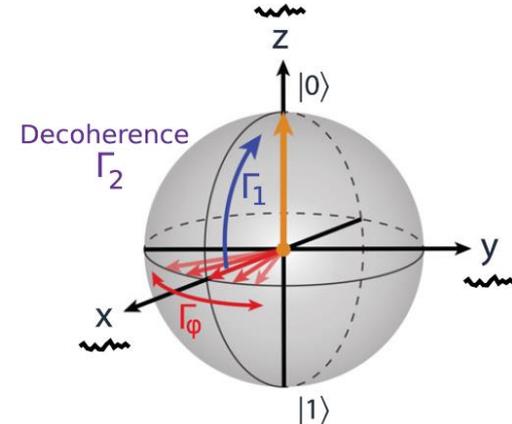
Longitudinal relaxation



Pure dephasing



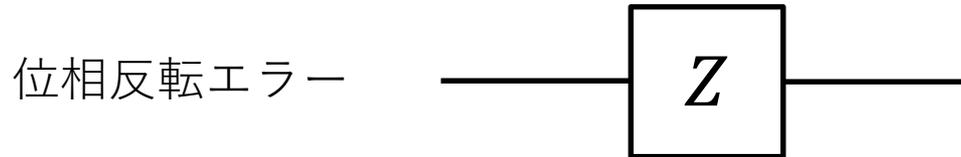
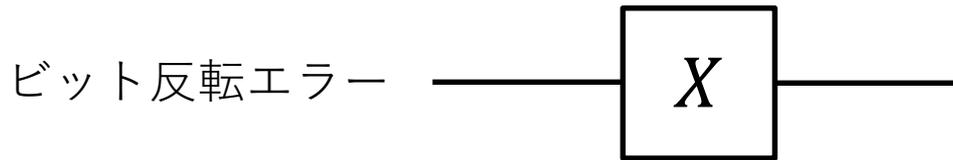
Transverse relaxation



# 量子回路におけるエラー

## 環境との結合

$$|\psi\rangle|e\rangle \xrightarrow{U_E} |\psi\rangle|e_I\rangle + X|\psi\rangle|e_X\rangle + Z|\psi\rangle|e_Z\rangle + XZ|\psi\rangle|e_Y\rangle$$



$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

## 量子誤り訂正の基本的なアイデア

- 連続的なエラーを測定によって離散化する
- ビット反転( $X$ ), 位相反転( $Z$ ), 位相-ビット反転( $XZ$ )のエラーを検出・訂正できればどんな1Qエラーも訂正可能

# 確認

$$U_E |\psi\rangle |e_0\rangle = |\psi\rangle |e_I\rangle + X |\psi\rangle |e_X\rangle + Z |\psi\rangle |e_Z\rangle + XZ |\psi\rangle |e_Y\rangle$$

$$\begin{cases} U_E |0\rangle |e_0\rangle = |0\rangle |e_{00}\rangle + |1\rangle |e_{10}\rangle \\ U_E |1\rangle |e_0\rangle = |0\rangle |e_{01}\rangle + |1\rangle |e_{11}\rangle \end{cases}$$

左辺  $U_E (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) |e_0\rangle = \alpha |0\rangle |e_{00}\rangle + \alpha |1\rangle |e_{10}\rangle + \beta |0\rangle |e_{01}\rangle + \beta |1\rangle |e_{11}\rangle$

右辺

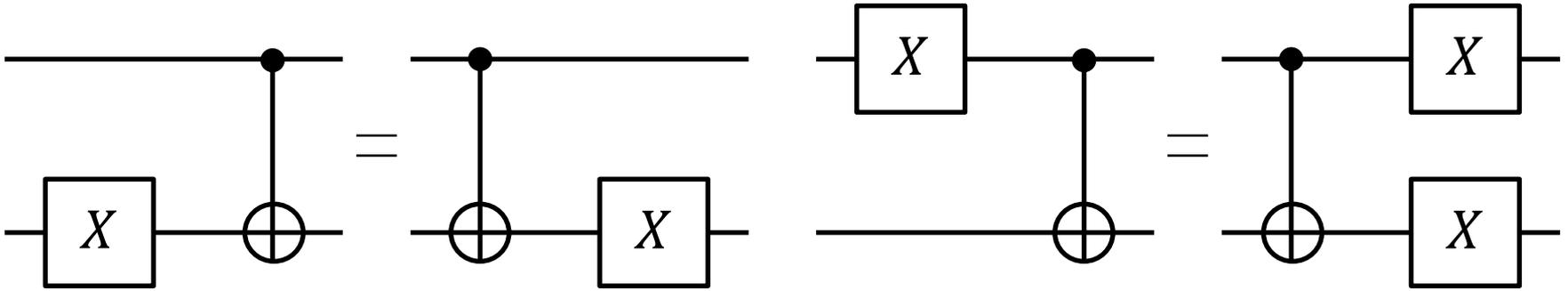
$$\begin{aligned} & (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) |e_I\rangle + (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) |e_X\rangle + (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) |e_Z\rangle + (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle) |e_Y\rangle \\ &= \alpha |0\rangle (|e_I\rangle + |e_Z\rangle) + \alpha |1\rangle (|e_X\rangle + |e_Y\rangle) + \beta |0\rangle (|e_X\rangle - |e_Y\rangle) + \beta |1\rangle (|e_I\rangle - |e_Z\rangle) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow |e_{I,Z}\rangle = \frac{|e_{00}\rangle \pm |e_{11}\rangle}{2} \quad |e_{X,Y}\rangle = \frac{|e_{10}\rangle \pm |e_{01}\rangle}{2}$$

cf. 量子テレポーテーション

$$|\psi\rangle_V |\beta_{00}\rangle_{AB} = \frac{1}{2} |\beta_{00}\rangle_{VA} |\psi\rangle_B + \frac{1}{2} |\beta_{01}\rangle_{VA} X |\psi\rangle_B + \frac{1}{2} |\beta_{10}\rangle_{VA} Z |\psi\rangle_B + \frac{1}{2} |\beta_{11}\rangle_{VA} XZ |\psi\rangle_B$$

# CNOTとXゲート



$$C_{12}X_2|a\rangle|b\rangle = C_{12}|a\rangle|b \oplus 1\rangle$$

$$= |a\rangle|a \oplus b \oplus 1\rangle$$

$$C_{12}X_1|a\rangle|b\rangle = C_{12}|a \oplus 1\rangle|b\rangle$$

$$= |a \oplus 1\rangle|a \oplus b \oplus 1\rangle$$

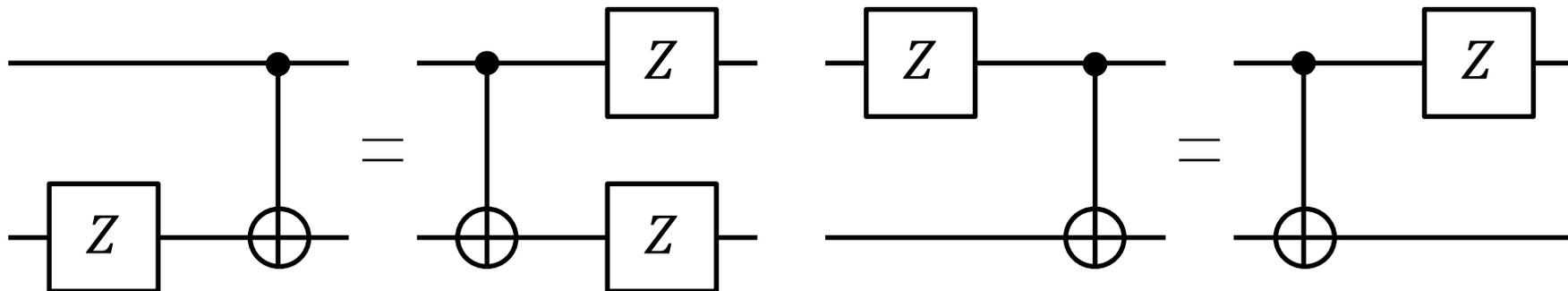
$$X_2C_{12}|a\rangle|b\rangle = X_2|a\rangle|a \oplus b\rangle$$

$$= |a\rangle|a \oplus b \oplus 1\rangle$$

$$X_1X_2C_{12}|a\rangle|b\rangle = X_1X_2|a\rangle|a \oplus b\rangle$$

$$= |a \oplus 1\rangle|a \oplus b \oplus 1\rangle$$

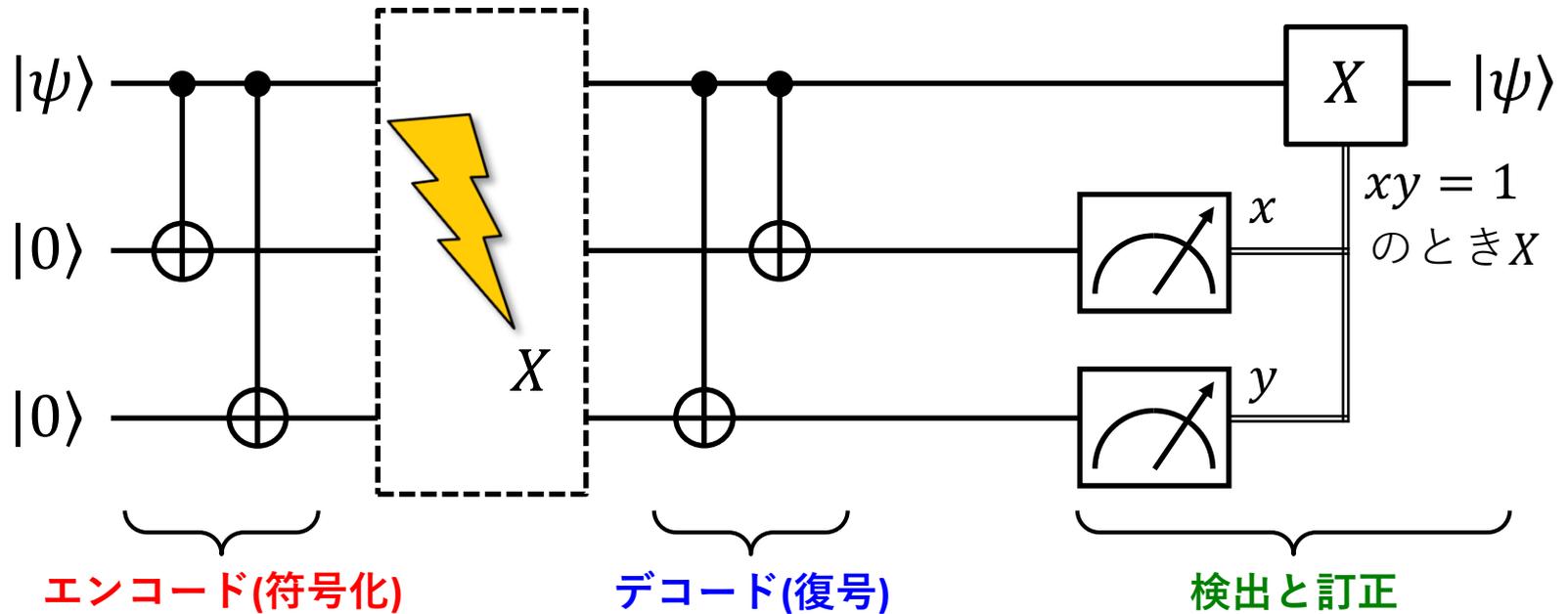
# CNOTとZゲート



## レポート課題・第7問(15点)

上記の回路がそれぞれ等価であることを示せ。

# ビット反転エラーの検出と訂正

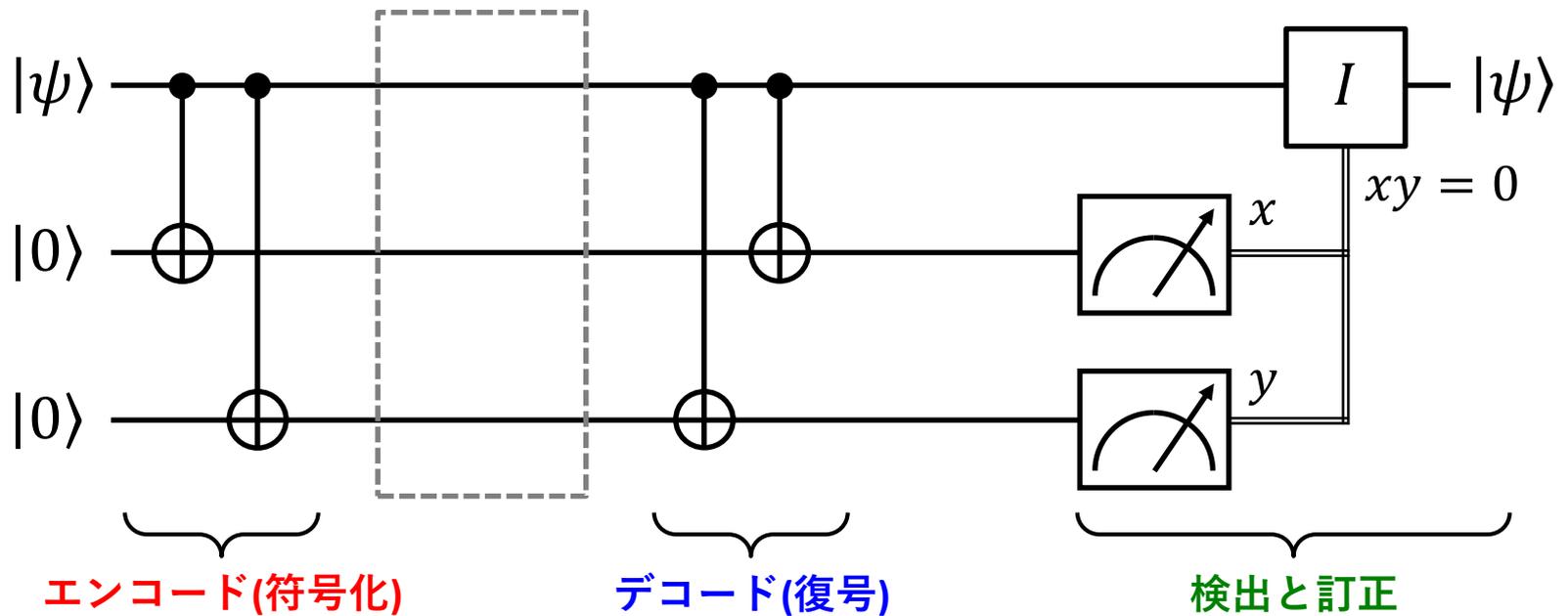


$$|\psi\rangle|00\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle$$



$$|\psi\rangle_L = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

# ビット反転エラーの検出と訂正

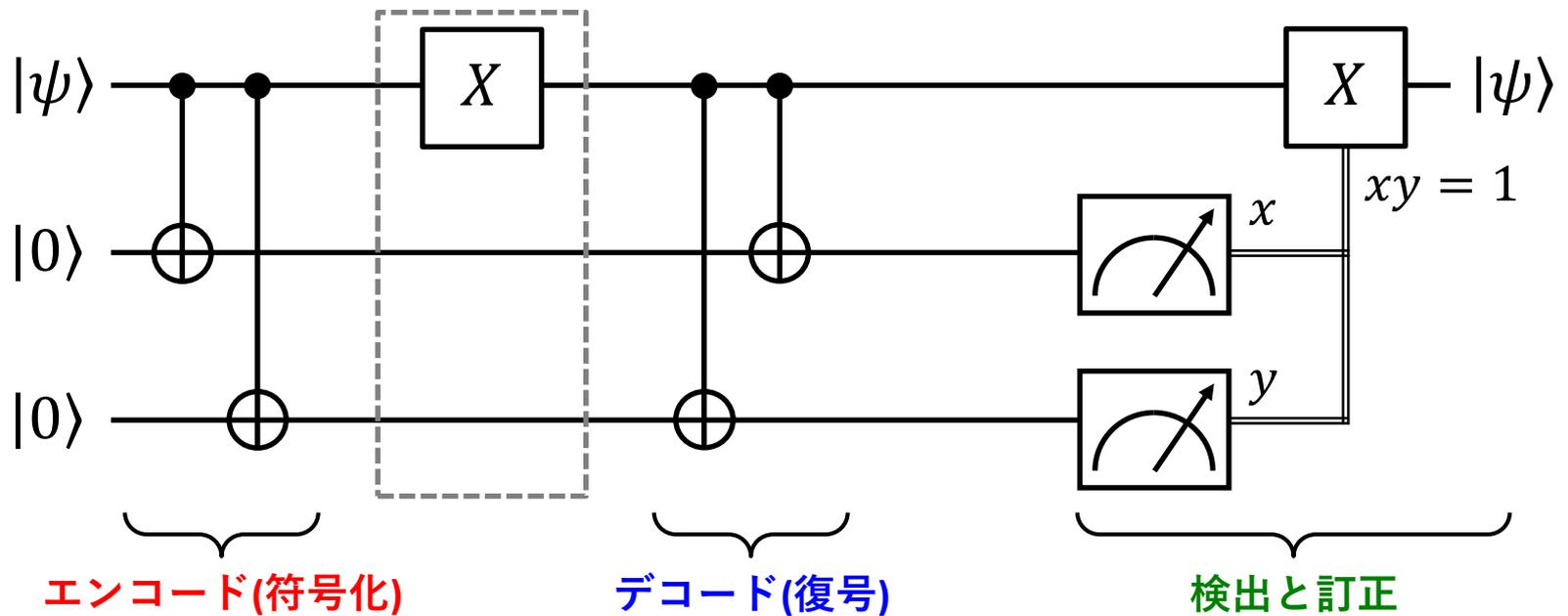


$$|\psi\rangle|00\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle$$



$$|\psi\rangle_L = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

# ビット反転エラーの検出と訂正

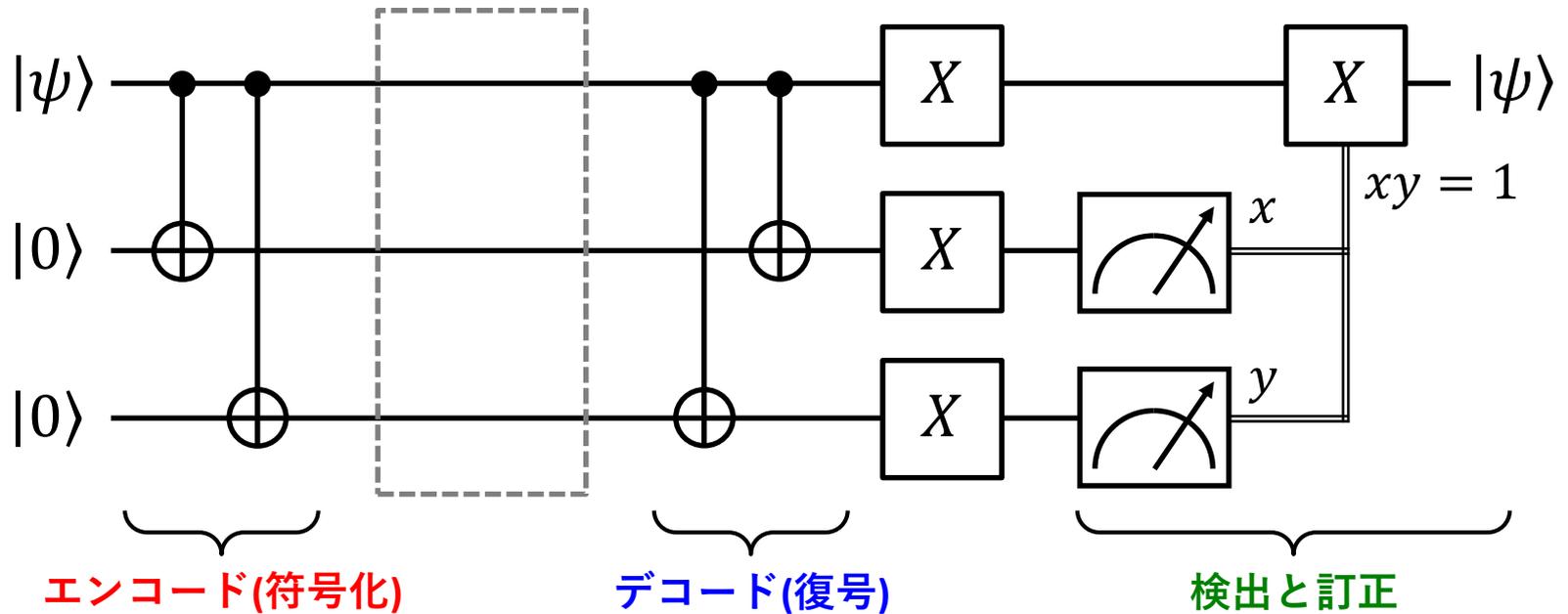


$$|\psi\rangle|00\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle$$

$$(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)|11\rangle$$

$$|\psi\rangle_L = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle \xrightarrow{\text{BFE}_1} \alpha|100\rangle + \beta|011\rangle$$

# ビット反転エラーの検出と訂正



$$|\psi\rangle|00\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle$$



$$|\psi\rangle_L = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

$$\xrightarrow{\text{BFE}_1}$$

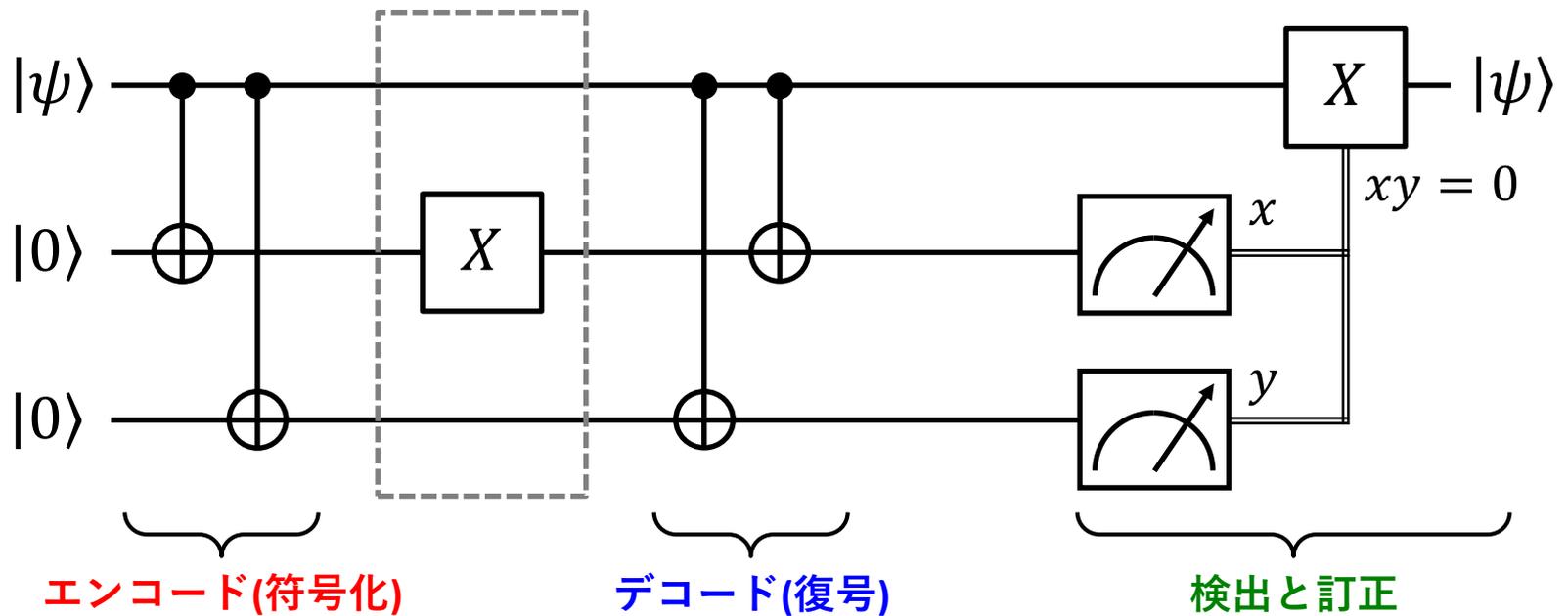
$$(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)|11\rangle$$



$$\alpha|100\rangle + \beta|011\rangle$$

エラーの伝搬  
 →  $|\psi\rangle$ を測定しなくてよい

# ビット反転エラーの検出と訂正



$$|\psi\rangle|00\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle$$

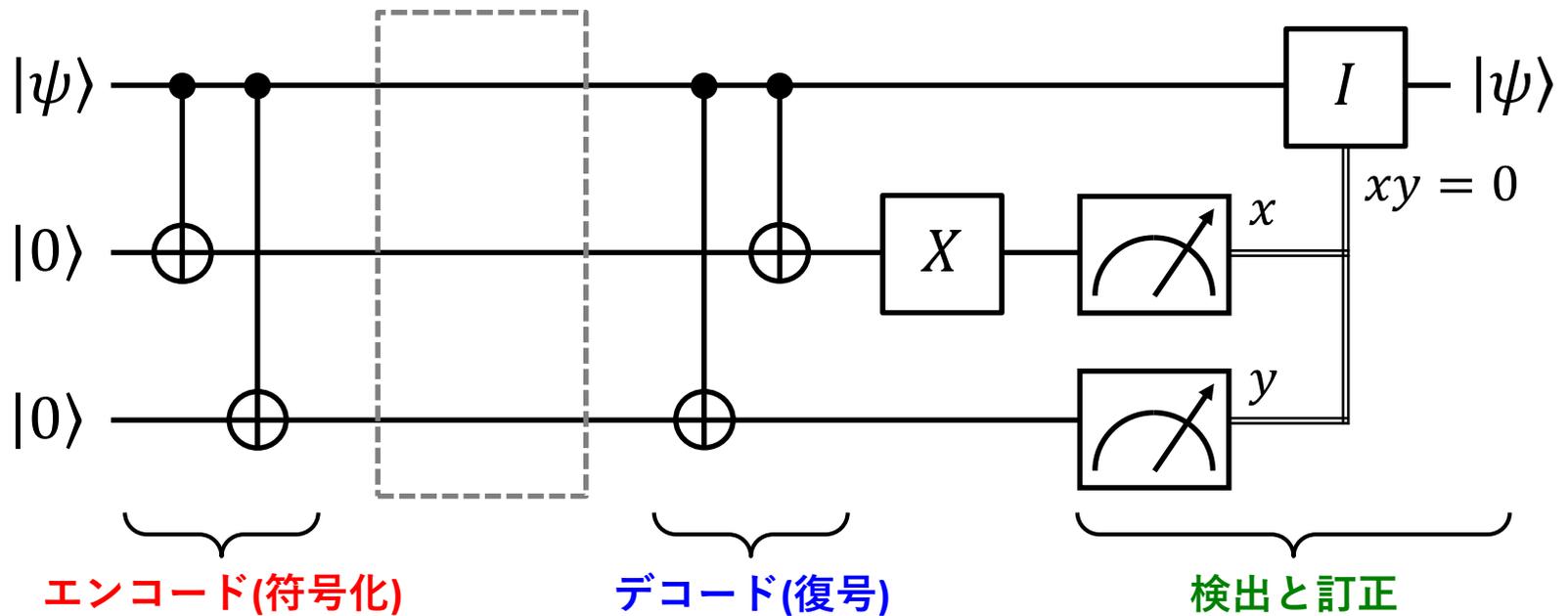
$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|10\rangle$$

$$|\psi\rangle_L = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

$\xrightarrow{\text{BFE}_2}$

$$\alpha|010\rangle + \beta|101\rangle$$

# ビット反転エラーの検出と訂正



$$|\psi\rangle|00\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle$$

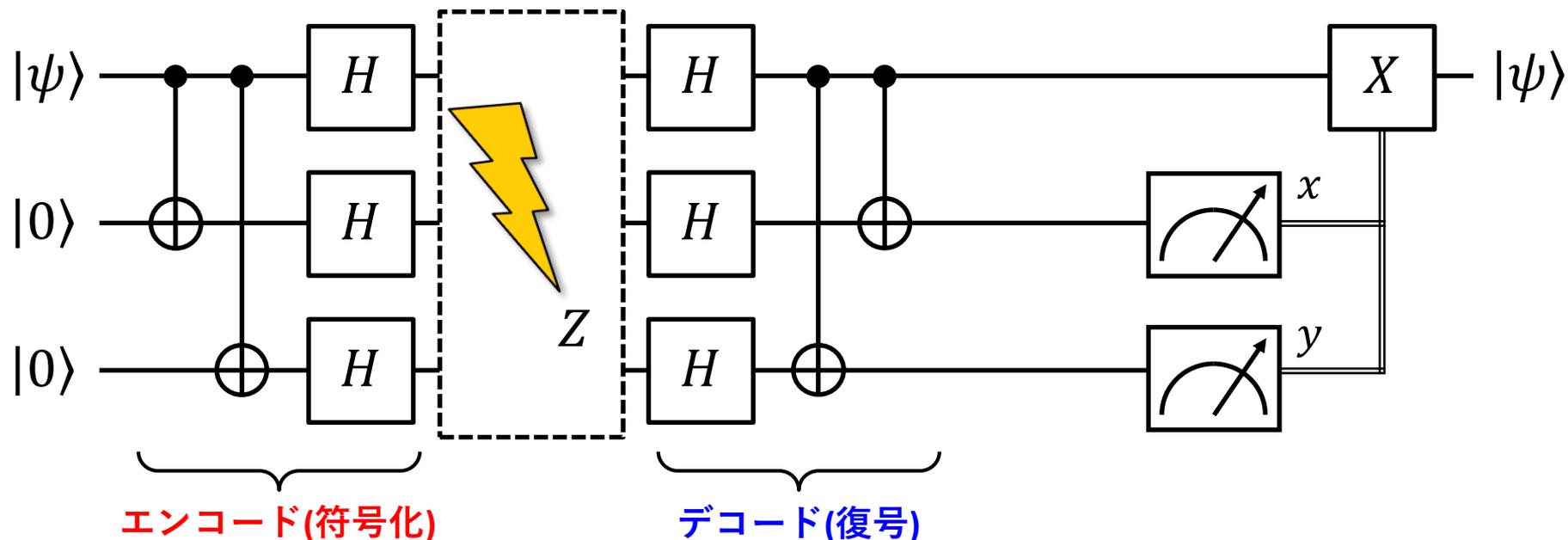
$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|10\rangle$$

$$|\psi\rangle_L = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

$\xrightarrow{\text{BFE}_2}$

$$\alpha|010\rangle + \beta|101\rangle$$

# 位相反転エラーの検出と訂正

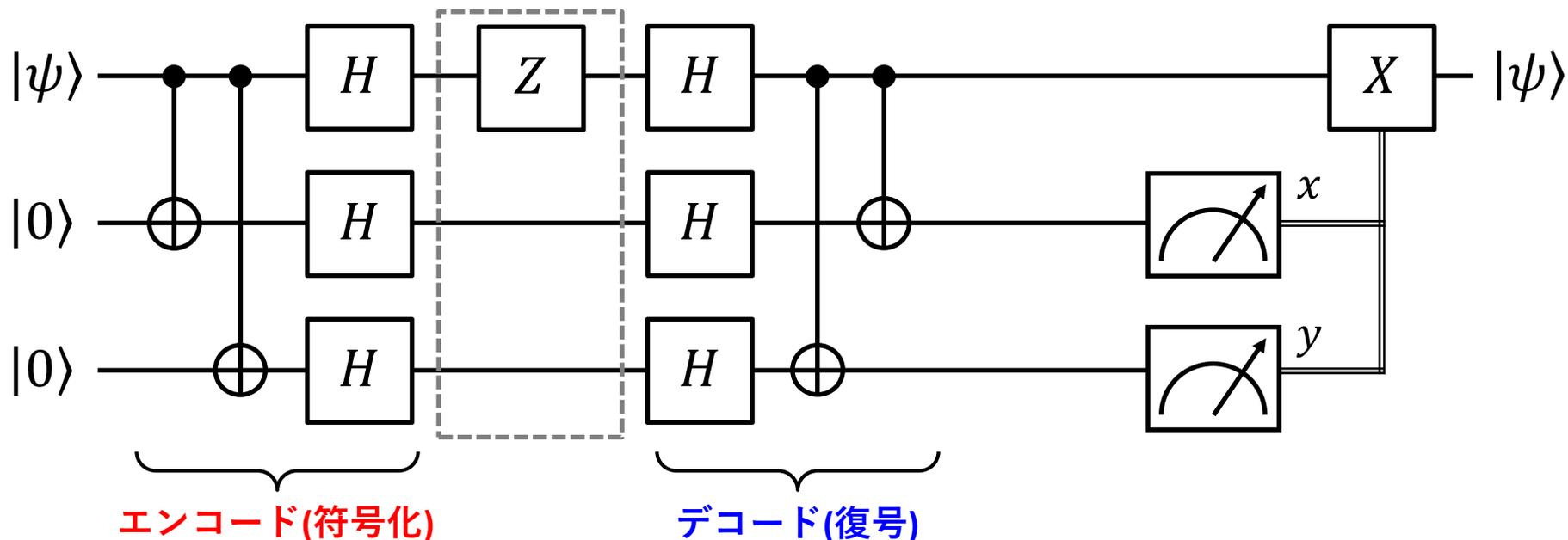


$$|\psi\rangle|00\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle$$

$$\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle \longrightarrow |\psi\rangle_L = \alpha|+++ \rangle + \beta|--- \rangle$$

$$|\pm\rangle \equiv \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

# 位相反転エラーの検出と訂正



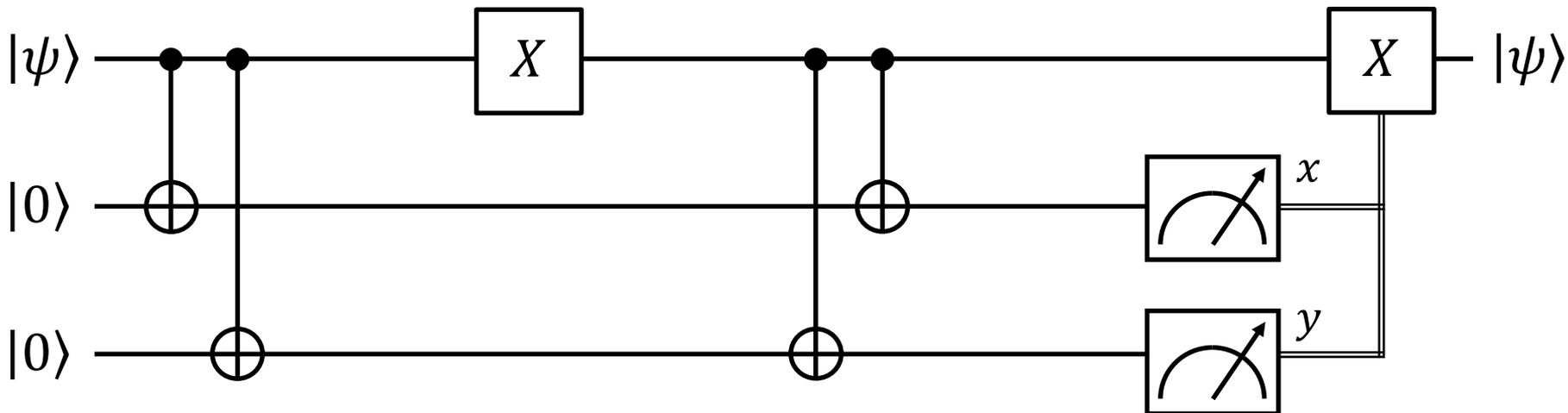
$$|\psi\rangle|00\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|00\rangle$$



$$\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle \longrightarrow |\psi\rangle_L = \alpha|+++ \rangle + \beta|--- \rangle$$

$$|\pm\rangle \equiv \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

# 位相反転エラーの検出と訂正

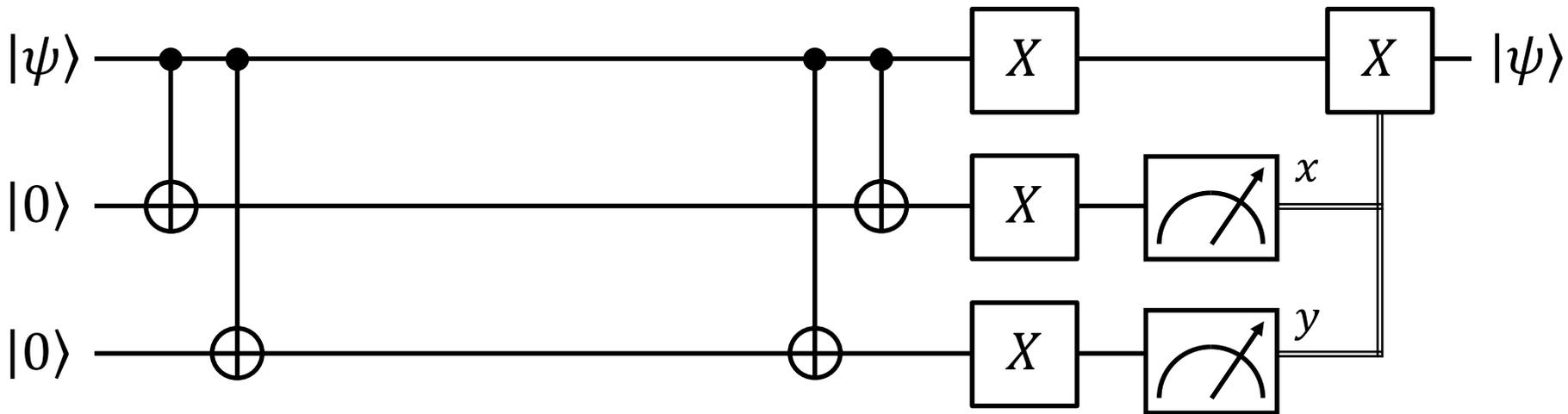


ビット反転エラーと同じ

$$HZH = X$$

$$HH = I$$

# 位相反転エラーの検出と訂正



ビット反転エラーと同じ

$$HZH = X$$

$$HH = I$$

デコードして1量子ビットに戻す  
のはモッタイナイ...  
論理ビットのまま計算を進めたい

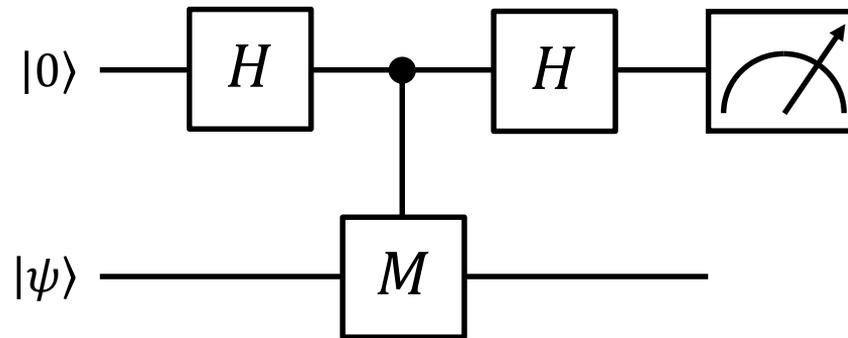
# シンドローム測定

## 演算子 $M$ の測定

$$M^2 = I \quad \text{自己共役}$$

$$MP_{\pm}|\psi\rangle = \pm P_{\pm}|\psi\rangle$$

$$P_{\pm} = \frac{I \pm M}{2} \quad \text{射影子: } P_{\pm}|\psi\rangle \text{ が } M \text{ の固有値 } \lambda = \pm 1 \text{ の固有状態となる}$$



$$|0\rangle|\psi\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|\psi\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle M|\psi\rangle)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle)|\psi\rangle + (|0\rangle - |1\rangle)M|\psi\rangle] \longrightarrow |0\rangle P_+|\psi\rangle + |1\rangle P_-|\psi\rangle$$

# シンドローム測定(シヨア符号)

エンコード  $|\psi\rangle_L = \alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L$

$$|0\rangle_L = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)$$

$$|1\rangle_L = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)$$

## エラー診断

$$M_1 = Z_1 Z_2$$

$$M_2 = Z_2 Z_3$$

$$M_3 = Z_4 Z_5$$

$$M_4 = Z_5 Z_6$$

$$M_5 = Z_7 Z_8$$

$$M_6 = Z_8 Z_9$$

$$M_7 = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6$$

$$M_8 = X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9$$

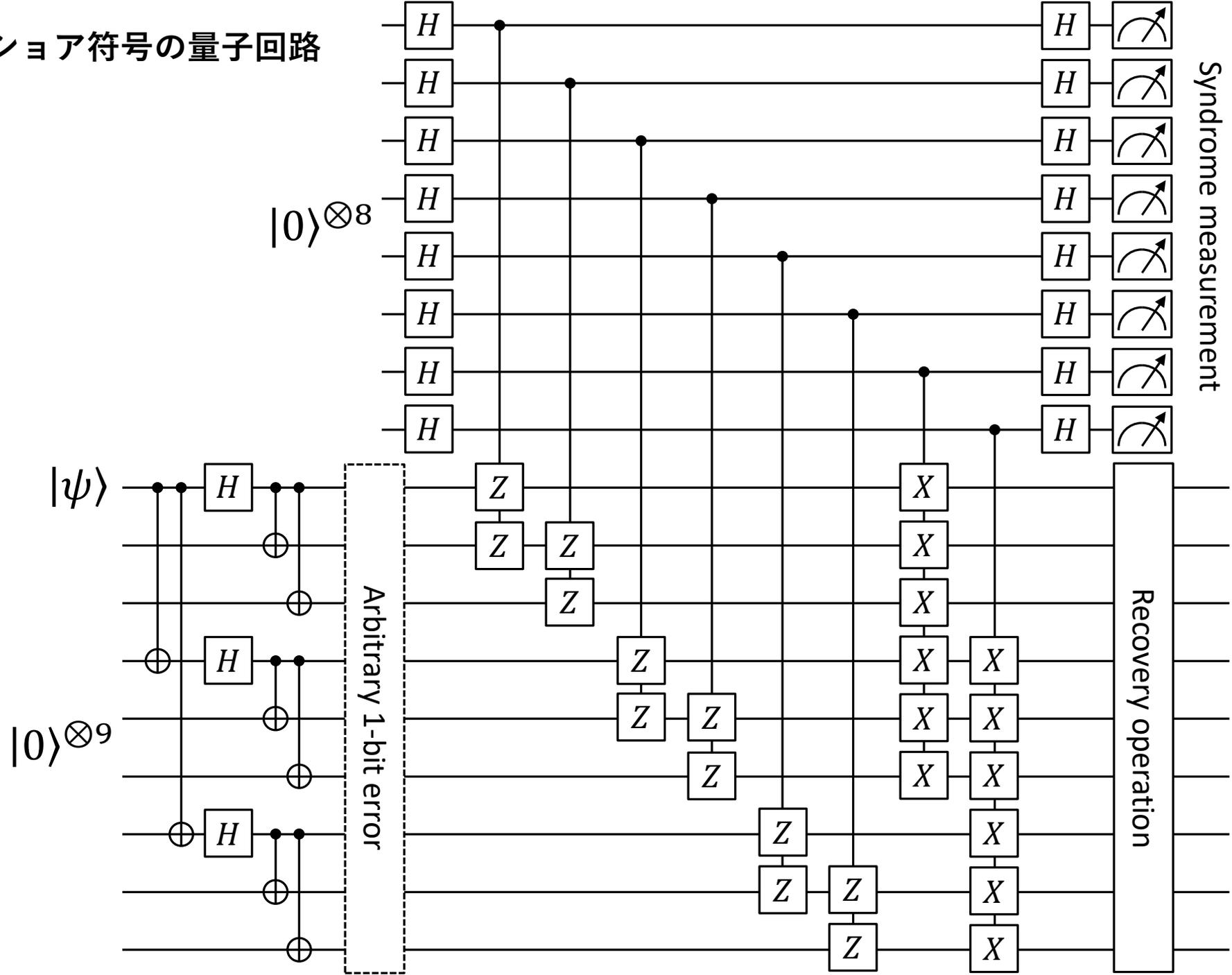
- 論理ビットは $\lambda = 1$ 固有状態  $M_i|\psi\rangle_L = |\psi\rangle_L$
- $X_i, Y_i, Z_i$ は $M_i$ の少なくとも1つと反交換
- 同時測定可  $M_i M_j = M_j M_i$

## 例) Q1がビット反転

$$M_1 X_1 |\psi\rangle_L = -X_1 M_1 |\psi\rangle_L = -X_1 |\psi\rangle_L$$

$$M_{i \neq 1} X_1 |\psi\rangle_L = X_1 M_{i \neq 1} |\psi\rangle_L = X_1 |\psi\rangle_L$$

# シヨア符号の量子回路

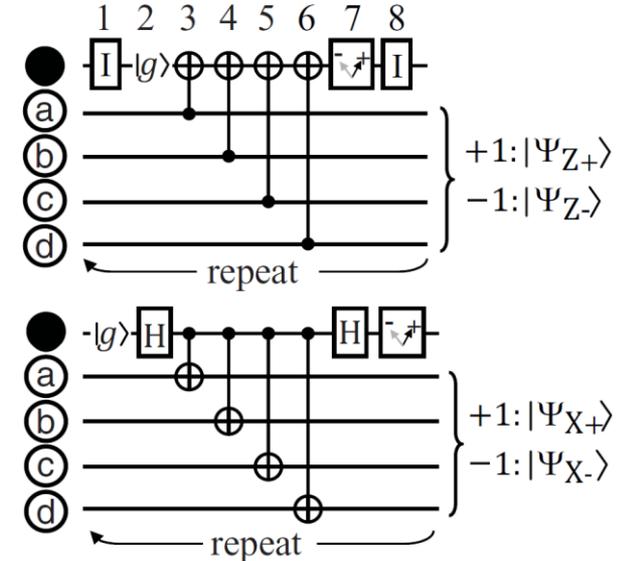
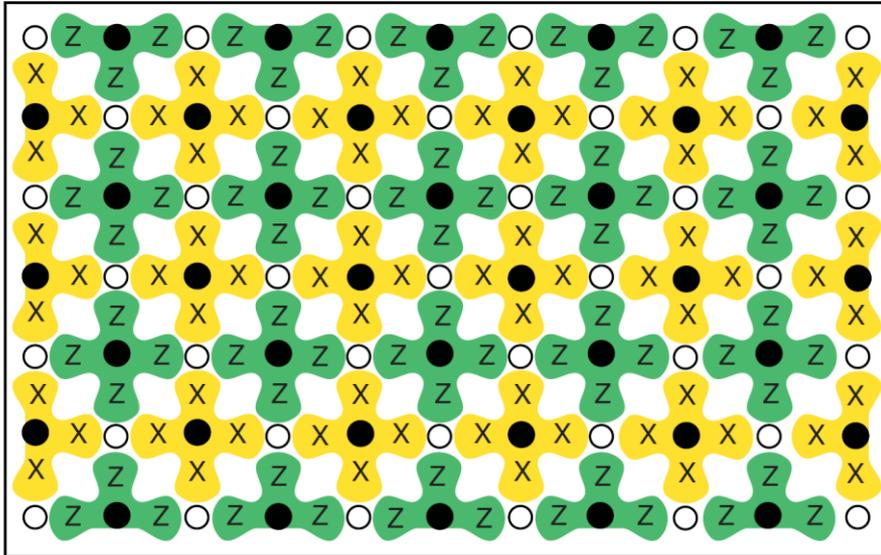


# 表面符号

(Surface code)

J. Math. Phys. **43**, 4452 (2002) Dennis *et al.*

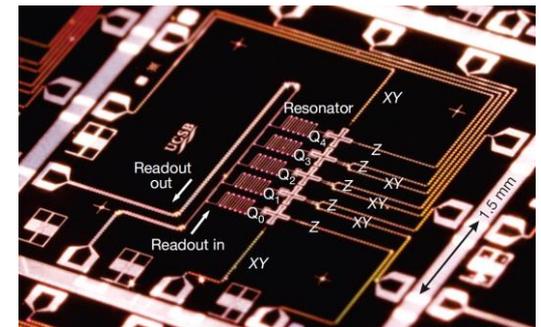
Phys. Rev. A **86**, 032324 (2012) Fowler *et al.*



- 2次元配列
- 高いエラー許容度(~1%)

## Superconducting quantum circuits at the surface code threshold for fault tolerance

R. Barends<sup>1\*</sup>, J. Kelly<sup>1\*</sup>, A. Megrant<sup>1</sup>, A. Veitia<sup>2</sup>, D. Sank<sup>1</sup>, E. Jeffrey<sup>1</sup>, T. C. White<sup>1</sup>, J. Mutus<sup>1</sup>, A. G. Fowler<sup>1,3</sup>, B. Campbell<sup>1</sup>, Y. Chen<sup>1</sup>, Z. Chen<sup>1</sup>, B. Chiaro<sup>1</sup>, A. Dunsworth<sup>1</sup>, C. Neill<sup>1</sup>, P. O'Malley<sup>1</sup>, P. Roushan<sup>1</sup>, A. Vainsencher<sup>1</sup>, J. Wenner<sup>1</sup>, A. N. Korotkov<sup>2</sup>, A. N. Cleland<sup>1</sup> & John M. Martinis<sup>1</sup>



Nature **508**, 500 (2014) Barends *et al.*