量子情報基礎

阿部 英介
慶應義塾大学スピントロニクス研究センター

応用物理情報特別講義A
2018年度春学期後半 金曜4限@14-202

参考書

- M. A. Nielsen & I. L. Chuang (2000)
  - “**Quantum Computation and Quantum Information**”
- Keisuke Fujii (2015)
  - “**Quantum Computation with Topological Codes: From Qubit to Topological Fault-Tolerance**” (arXiv:1504.01444)
- **量子コンピュータ授業**
  - https://www.youtube.com/playlist?list=PLB1324F2305C028F7
  - http://www.appi.keio.ac.jp/Itoh_group/abe/

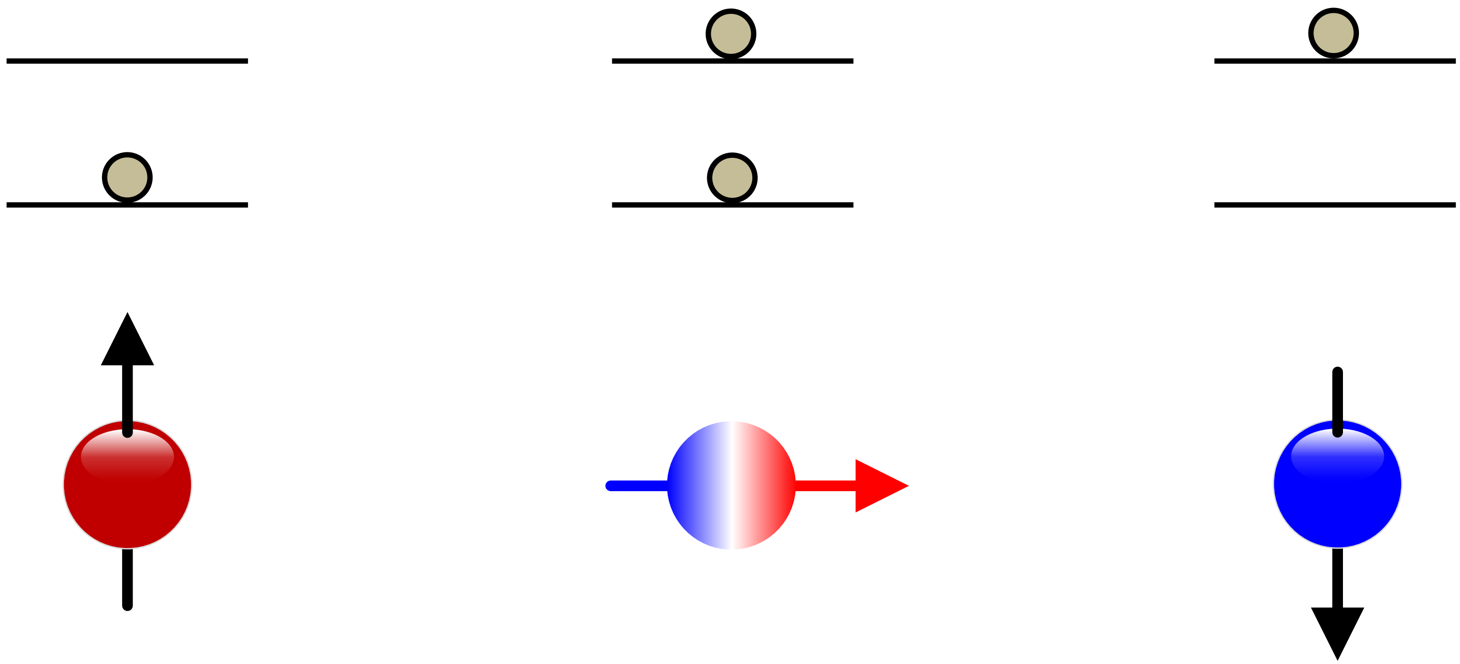
講義内容

- 量子ビットと量子ゲート
- 量子アルゴリズム

講義内容

- **量子ビットと量子ゲート**
- 量子アルゴリズム

量子ビット = スピン1/2



$|0\rangle$ $\quad$ $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ $\quad$ $|1\rangle$

重ね合わせ

量子ビット

定義: 計算基底のベクトル表示

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle 0|0\rangle = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle 1|0\rangle = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

公準(postulate): 許される状態はヒルベルト空間内

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$$

ブロッホ球

1量子ビットの状態の記述

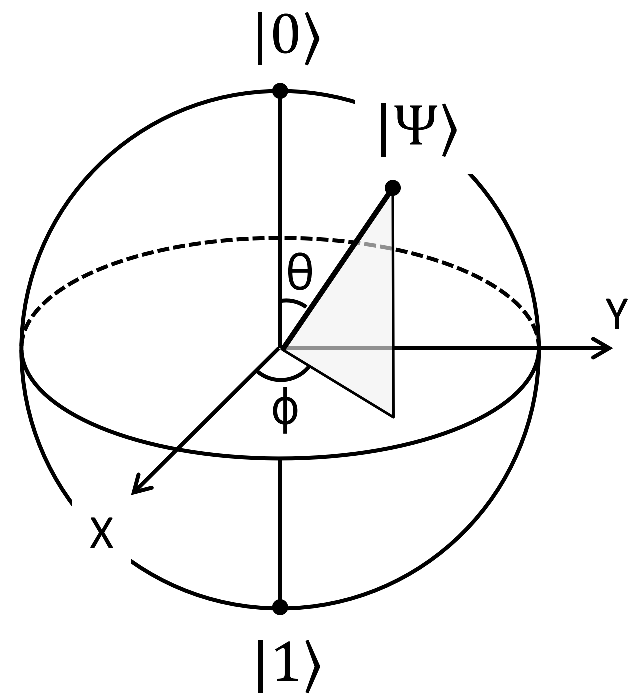
$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$|\Psi\rangle = \underline{e^{i\gamma}}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)$$

測定に影響しない

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$



ブロッホ球

1量子ビットの状態の記述

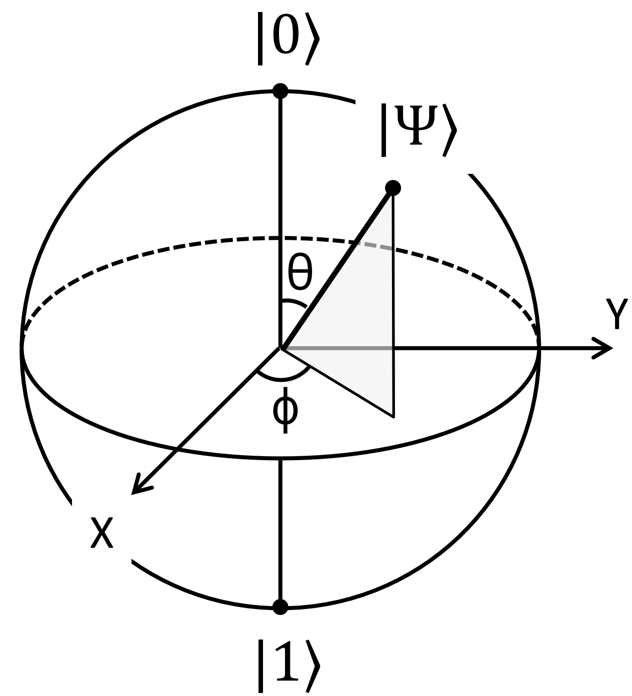
$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

例: Z軸上(θ = 0, π**)**

$$|0\rangle, |1\rangle$$

例: X,Y軸上(θ = π/2, ϕ = 0, π, ± π/2**)**

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle)$$



ユニタリ発展

定義: エルミート共役 $A^\dagger = (A^T)^*$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$

定義: 自己共役 $A = A^\dagger$

定義: ユニタリ $UU^\dagger = I$

$\Downarrow$

公準: 量子状態の時間発展はユニタリ

シュレディンガー方程式の解

$$|\Psi(t+\Delta t)\rangle = \underline{\exp\left(-\frac{iH\Delta t}{\hbar}\right)}|\Psi(t)\rangle$$

ハミルトニアンHを指数演算子化したe^{iH}はユニタリ

ユニタリ発展

定義: エルミート共役 $A^\dagger = (A^T)^*$ $\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$

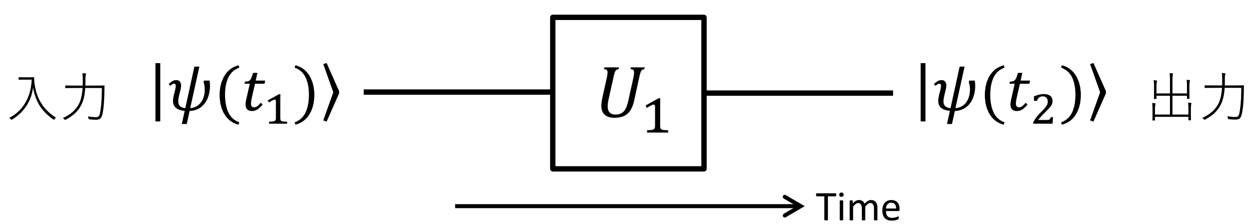
定義: 自己共役 $A = A^\dagger$

定義: ユニタリ $UU^\dagger = I$

⇩

公準: 量子状態の時間発展はユニタリ

$$|\psi(t_2)\rangle = U_1|\psi(t_1)\rangle$$



ユニタリ発展

定義: エルミート共役　$A^\dagger = (A^T)^*$　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$

定義: 自己共役　$A = A^\dagger$

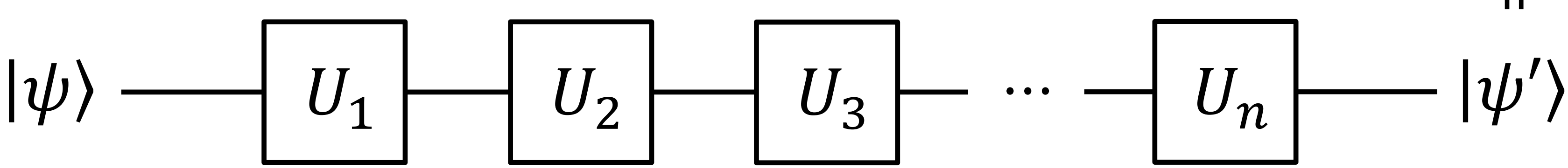
定義: ユニタリ　$UU^\dagger = I$

公準: 量子状態の時間発展はユニタリ

$$|\psi(t_2)\rangle = U_1|\psi(t_1)\rangle$$

$$U_n \cdots U_2 U_1|\psi\rangle$$

$$\parallel$$



1量子ビットゲート列(量子回路)

パウリゲート

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \;\text{———}\; \boxed{\sigma_i} \;\text{———}\; \alpha(\sigma_i|0\rangle) + \beta(\sigma_i|1\rangle)$$

パウリ行列

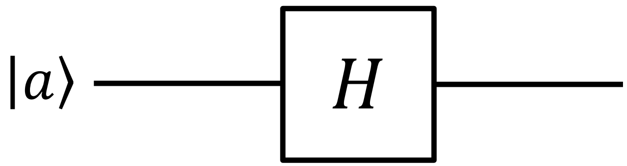
$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i^2 = I \qquad [\sigma_i, \sigma_{i+1}] = 2i\sigma_{i+2} \qquad \{\sigma_i, \sigma_{i+1}\} = 0$$

アダマールゲート



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{b=0,1}(-1)^{a\cdot b}|b\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^a|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} H|0\rangle = \dfrac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\[2ex] H|1\rangle = \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\[2ex] H\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \end{cases} \Longleftrightarrow H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$HH = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow H^\dagger = H$$

自己共役

アダマールゲート

$$|a\rangle \;—\boxed{H}—\; \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{b=0,1}(-1)^{a\cdot b}|b\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^{a}|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$HH|a\rangle = H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{b=0,1}(-1)^{a\cdot b}|b\rangle\right)$$

$$\boxed{(a+c)\cdot b = \begin{cases} 0 & (c=a) \\ b & (c=\overline{a}) \end{cases}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{b=0,1}(-1)^{a\cdot b}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c=0,1}(-1)^{b\cdot c}|c\rangle\right) = \frac{1}{2}\sum_{b,c}(-1)^{(a+c)\cdot b}|c\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{b}\left(|a\rangle + (-1)^{b}|\overline{a}\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|a\rangle + |\overline{a}\rangle + |a\rangle - |\overline{a}\rangle\right) = |a\rangle$$

干渉による強め合いと弱め合い

複数量子ビット

2量子ビットの状態の記述

$$|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$$

公準: 複合系の状態はテンソル積で表される

(注)2量子ビットの状態の計算基底は4つ

$$|00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, |01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, |11\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

定義: テンソル積(行列表示)

$$a \otimes b = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \\ \\ a_2 \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 b_1\\a_1 b_2\\a_2 b_1\\a_2 b_2\end{pmatrix}$$

2量子ビット

2量子ビットの計算基底

$$|00\rangle = |0\rangle|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\rangle|1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

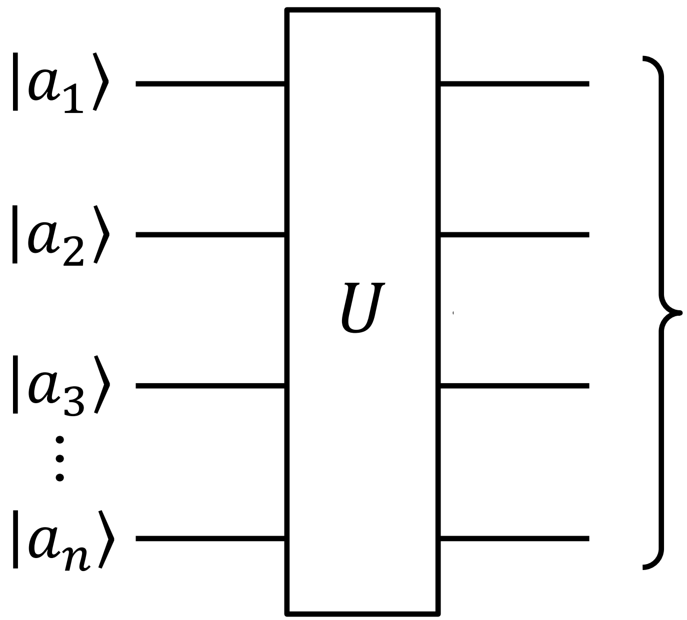
$$|10\rangle = |1\rangle|0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\rangle|1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2量子ビット状態

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

複数量子ビットゲート



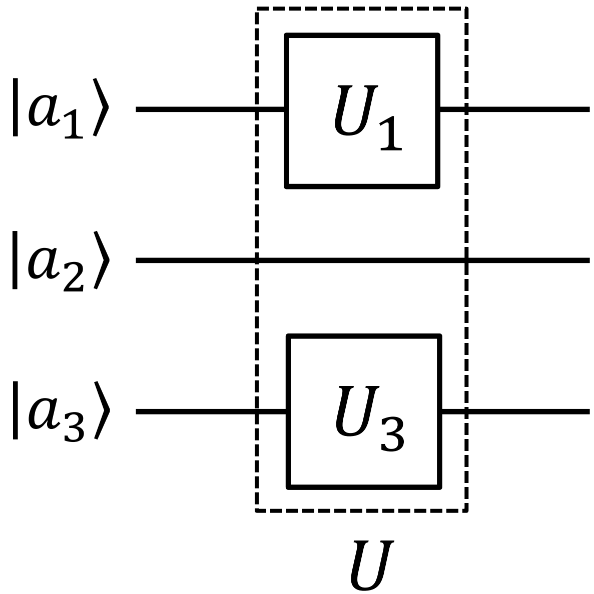
$U|a_1\rangle|a_2\rangle|a_3\rangle\cdots|a_n\rangle$

(注)”nビット目”は、量子ゲートでは上からn番目、ケットの左からn番目を指すのが通例

$|a_1\rangle|a_2\rangle|a_3\rangle\cdots|a_n\rangle$: 2^n次元の状態ベクトル

U : 2^nx2^nのユニタリ行列

複数量子ビットゲート



$$U|a_1, a_2, a_3\rangle$$
$$= (U_1 \otimes I \otimes U_3)|a_1\rangle|a_2\rangle|a_3\rangle$$

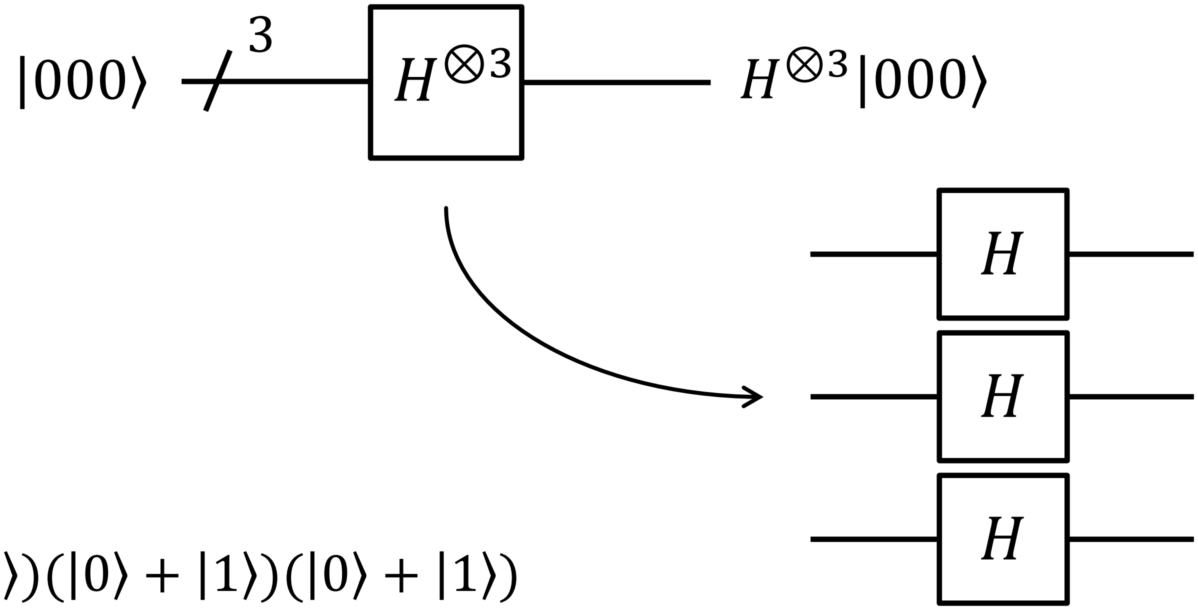
ビットごとに計算してOK

定義: テンソル積(行列表示)

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \times B & a_3 \times B \\ a_2 \times B & a_4 \times B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_3 & a_3 b_1 & a_3 b_3 \\ a_1 b_2 & a_1 b_4 & a_3 b_2 & a_3 b_4 \\ a_2 b_1 & a_2 b_3 & a_4 b_1 & a_4 b_3 \\ a_2 b_2 & a_2 b_4 & a_4 b_2 & a_4 b_4 \end{pmatrix}$$

*n*量子ビットの重ね合わせ



$H^{\otimes 3}|000\rangle$

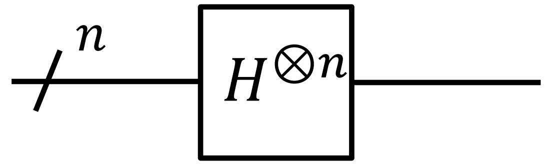
$$= \frac{1}{\sqrt{2^3}}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^3}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^3}} \sum_{a,b,c=0,1} |abc\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}} \sum_{x=0}^{2^3-1} |x\rangle$$

n量子ビットの重ね合わせ

$|x\rangle = |a_1\rangle|a_2\rangle\cdots|a_n\rangle$



$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_y (-1)^{x\cdot y}|y\rangle$

$x \cdot y \equiv a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$

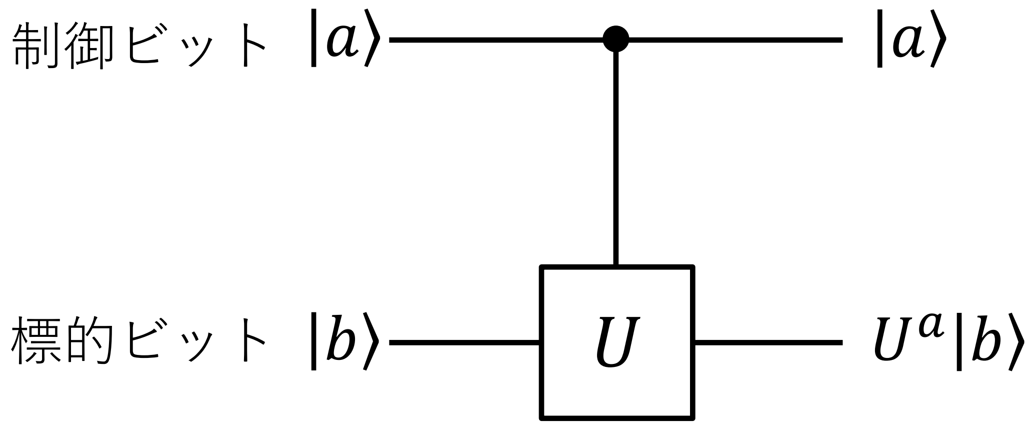
$$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(\sum_{b_1=0,1}(-1)^{a_1\cdot b_1}|b_1\rangle\right)\cdots\left(\sum_{b_n=0,1}(-1)^{a_n\cdot b_n}|b_n\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{b_1,b_2\cdots b_n}(-1)^{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n}|b_1 b_2\cdots b_n\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_y (-1)^{x\cdot y}|y\rangle$$

制御Uゲート

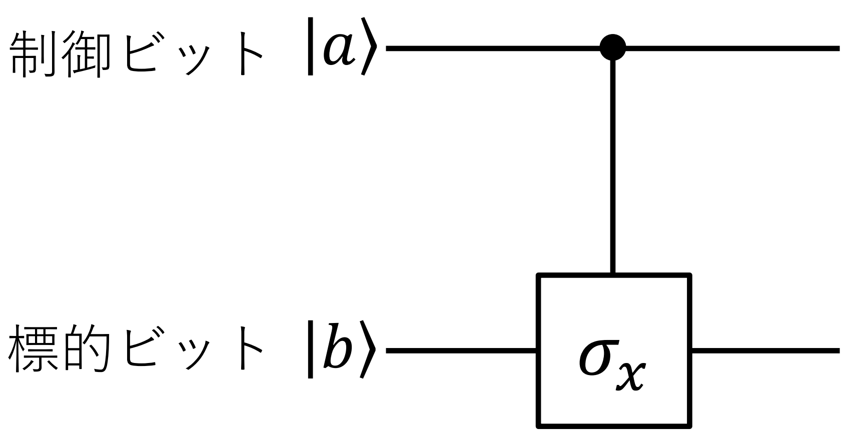
制御ビットの状態に応じて標的ビットにUが作用



$$\begin{cases} |b\rangle \ (a=0) \\ U|b\rangle \ (a=1) \end{cases}$$

制御NOTゲート

制御ビットが1のとき標的ビットを反転



$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

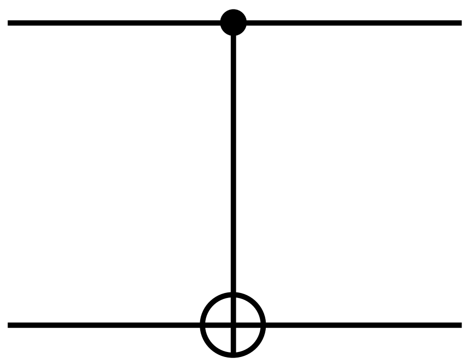
$$\begin{aligned} \mathrm{CNOT}|00\rangle &= |00\rangle \\ \mathrm{CNOT}|01\rangle &= |01\rangle \\ \mathrm{CNOT}|10\rangle &= |11\rangle \\ \mathrm{CNOT}|11\rangle &= |10\rangle \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

制御NOTゲート

制御ビットが1のとき標的ビットを反転

制御ビット $|a\rangle$ → $|a\rangle$

標的ビット $|b\rangle$ → $(\sigma_x)^a|b\rangle = a \oplus b$



$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{CNOT}|00\rangle &= |00\rangle \\ \mathrm{CNOT}|01\rangle &= |01\rangle \\ \mathrm{CNOT}|10\rangle &= |11\rangle \\ \mathrm{CNOT}|11\rangle &= |10\rangle \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ユニバーサル量子ゲート

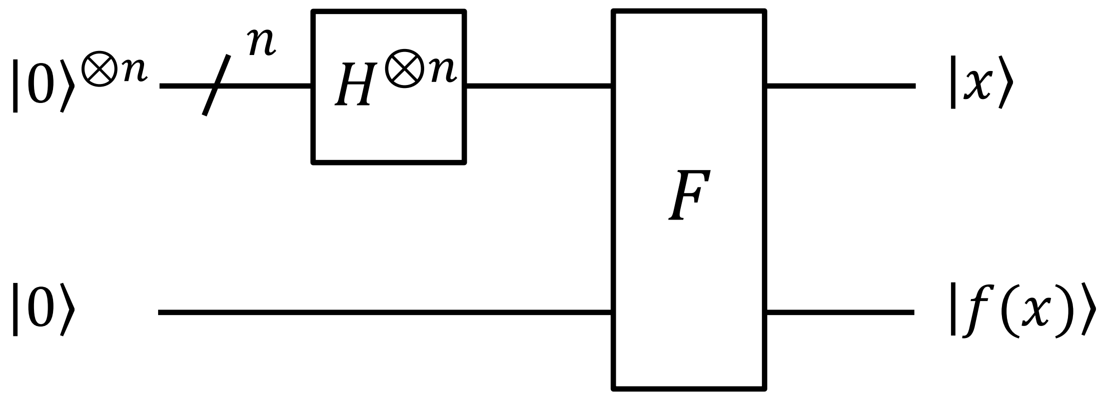
- **1量子ビットゲートとCNOT**
  - 1量子ビットゲートとCNOTさえ実現できれば、ほかの全ての*n*量子ビットゲートはその組み合わせで実行可能
- ***H*,S,*T*とCNOT**
  - 耐故障性(fault tolerance)を付与できる

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

講義内容

- 量子ビットと量子ゲート
- **量子アルゴリズム**

量子並列性



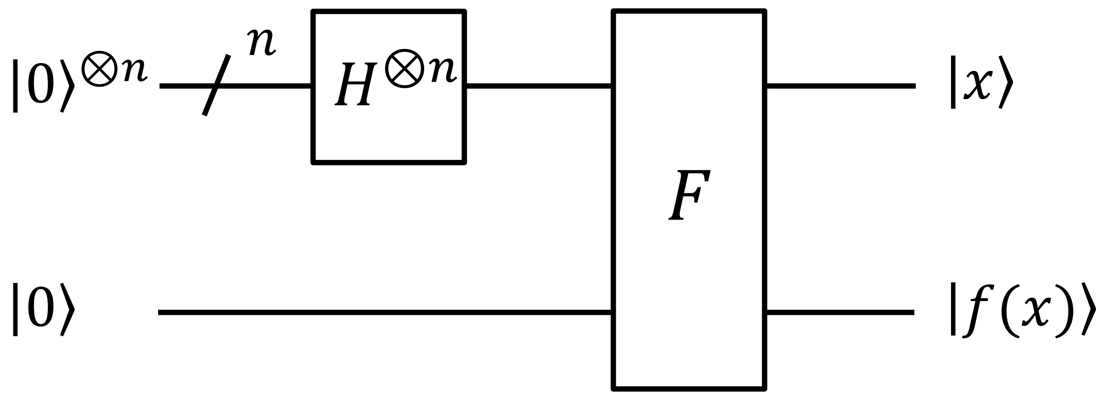
$f(x)$: 2値関数(ビットデータ列)

$$F|x\rangle|a\rangle = |x\rangle|a \oplus f(x)\rangle$$

$$FF|x\rangle|a\rangle = |x\rangle|a \oplus f(x) \oplus f(x)\rangle = |x\rangle|a\rangle$$

$$|0\rangle^{\otimes n}|0\rangle \xrightarrow{(H^{\otimes n}) \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle|0\rangle \xrightarrow{F} \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle|f(x)\rangle$$

量子並列性

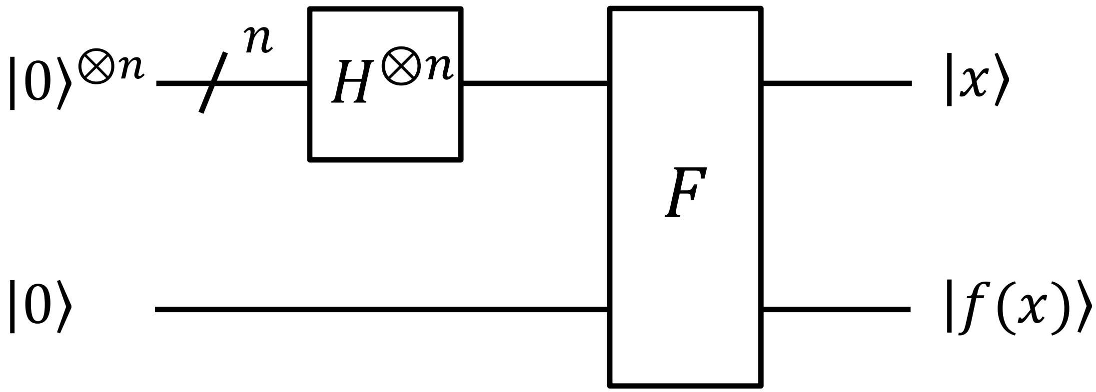


$$\frac{1}{\sqrt{2^2}}\sum_{x=0}^{2^2-1}|x\rangle|f(x)\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|f(0)\rangle + |1\rangle|f(1)\rangle + |2\rangle|f(2)\rangle + |3\rangle|f(3)\rangle)$$

$f(x)$の情報を全て含んだ状態(量子もつれ、エンタングルメント)

計算・情報処理の高速化に繋がる?

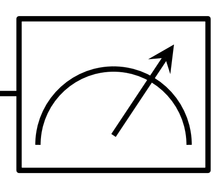
量子並列性と測定



$$\frac{1}{\sqrt{2^2}}\sum_{x=0}^{2^2-1}|x\rangle|f(x)\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle|f(0)\rangle + |1\rangle|f(1)\rangle + |2\rangle|f(2)\rangle + |3\rangle|f(3)\rangle\right)$$

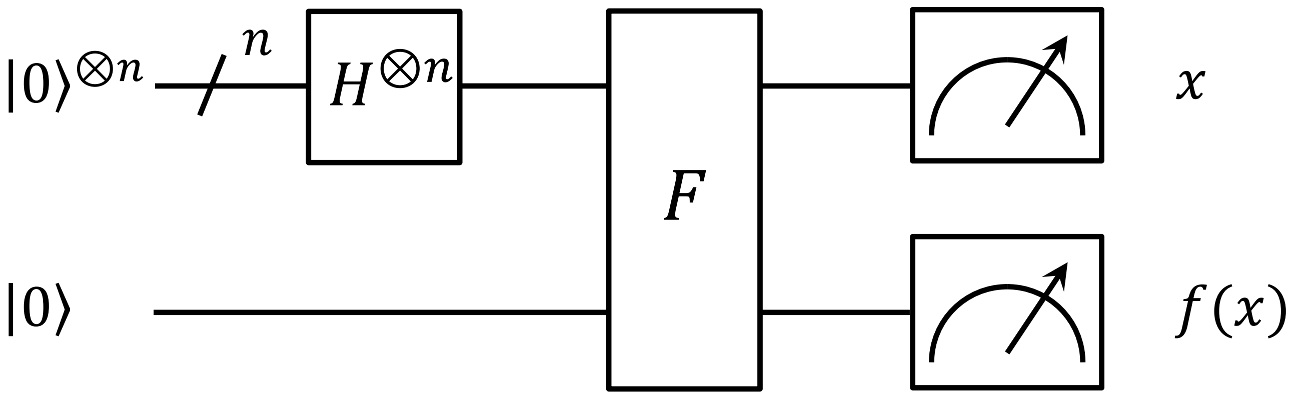
公準: 射影測定

$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$



$$\begin{cases} \text{確率}|\alpha|^2\text{で“0”を出力} \\ \text{確率}|\beta|^2\text{で“1”を出力} \end{cases}$$

量子並列性と測定



$$\frac{1}{\sqrt{2^2}}\sum_{x=0}^{2^2-1}|x\rangle|f(x)\rangle = \frac{1}{2}\left(\cancel{|0\rangle|f(0)\rangle} + |1\rangle|f(1)\rangle + \cancel{|2\rangle|f(2)\rangle} + \cancel{|3\rangle|f(3)\rangle}\right)$$

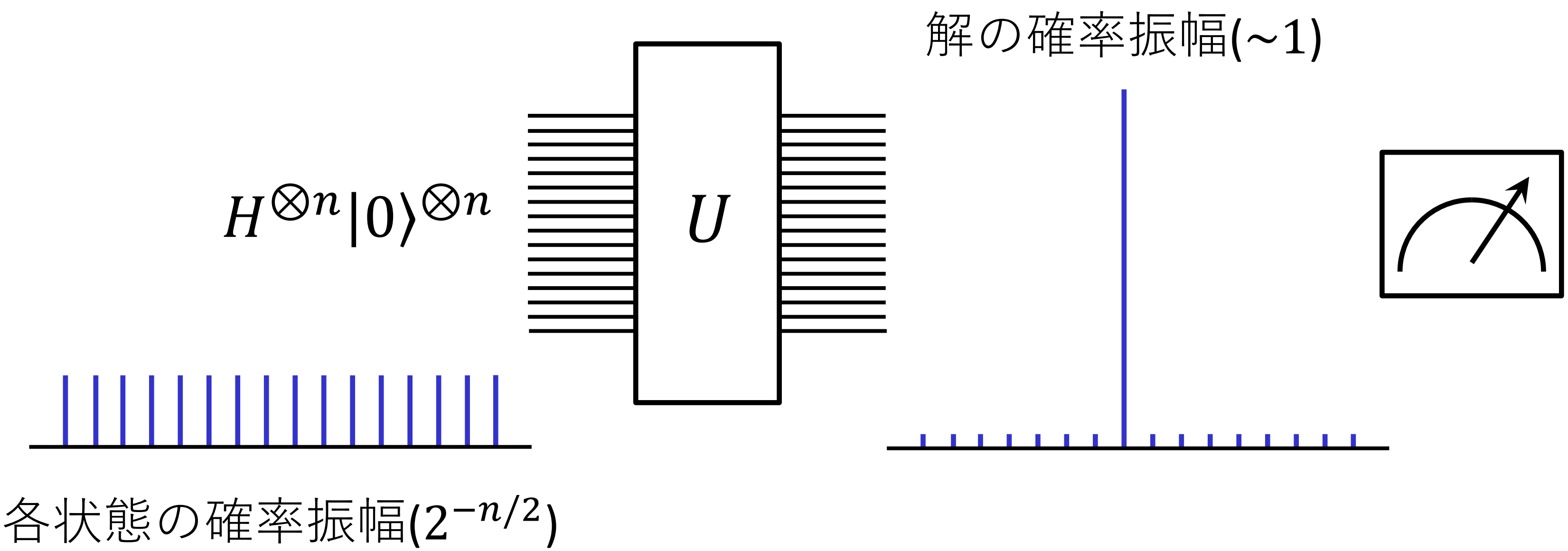
確率1/4でどれか1つの組の結果を知る

⇩

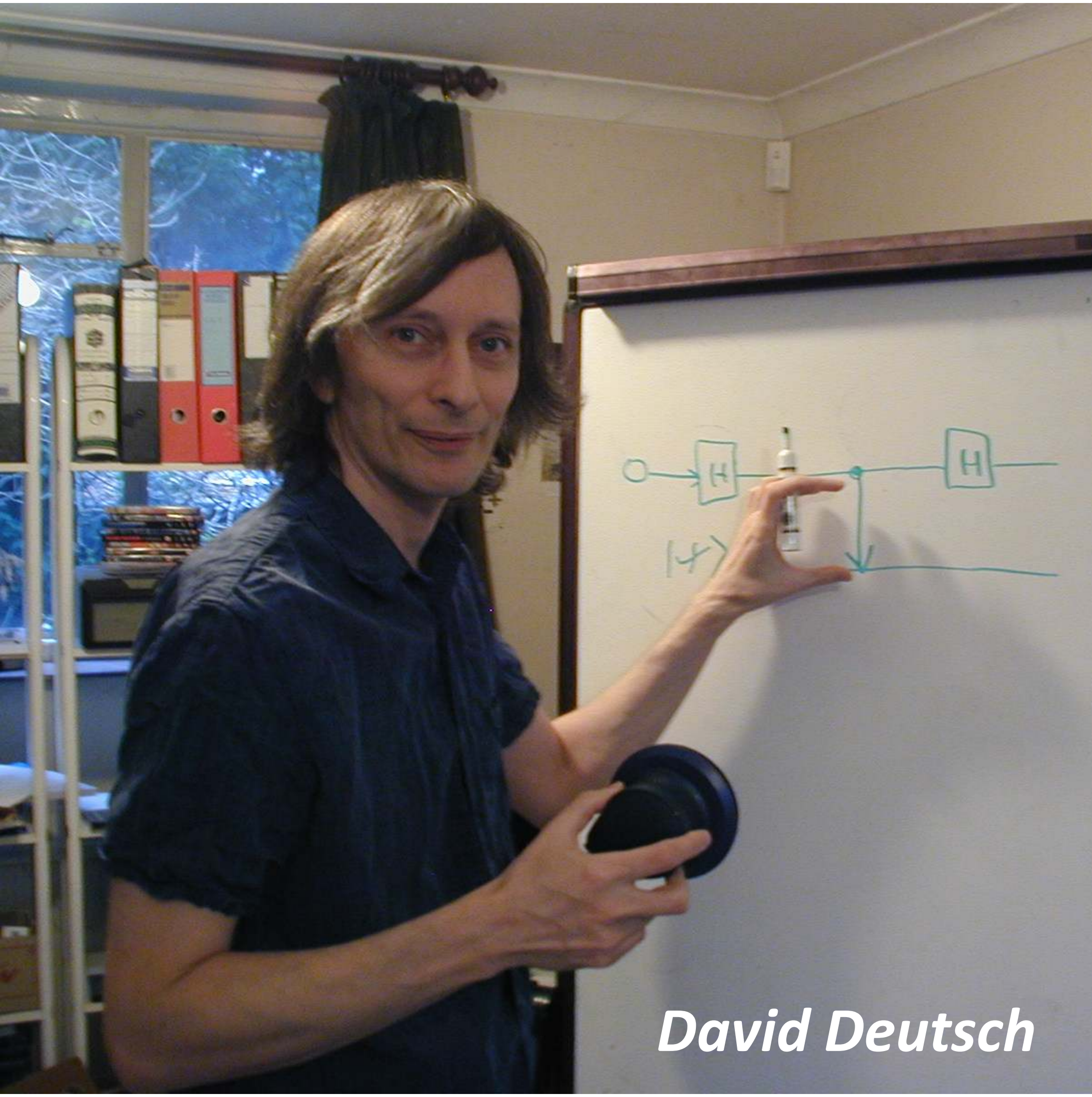
量子並列性にナイーブに期待される計算・情報処理の高速化は、
測定による状態の収縮によりキャンセルされそう

量子アルゴリズム

- 重ね合わせ状態(**量子並列性**)から始めて、解の状態の確率振幅が大きくなるよう(**量子干渉**)にユニタリ変換し、最後に**測定**
- **ドイチェ・ジョザ**、グローバー(データ検索)、ショア(素因数分解)...



ドイチェ・ジョザのアルゴリズム



ドイチェの問題

定義: 2値関数$f(x)$について、全ての入力xに対して同じ出力(全て0か全て1)を返すものを**“constant(一定)”**、半分が0, 半分が1となるものを**“balanced(均等)”**と呼ぶ

例:

constant

x	$f(x)$
0	0
1	0
2	0
3	0

balanced

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	1
3	0

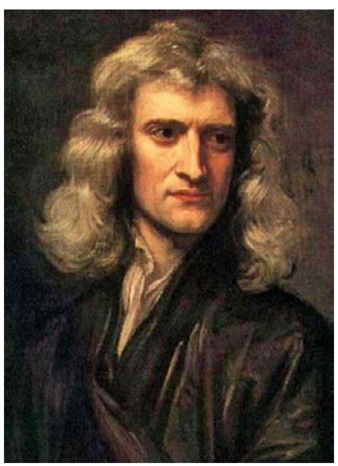
どちらでもない

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	1
3	1

ドイチェの問題

ドイチェは**constant**か**balanced**の$f(x)$を持っている。**ニュートン**と**シュレディンガー**は、$f(x)$がconstantかbalancedかを判定するために**何回の問い合わせ**が必要か?

"古典"問い合わせ



I. Newton
(By Godfrey Kneller)

$x = 0$

$f(0) = 0$

$x = 1$

$f(1) = 0$

$\vdots$

(最大$2^{\frac{n}{2}} + 1$回)

x	$f(x)$
0	0
1	0
2	0
3	0

$\sum_x |x\rangle|0\rangle$

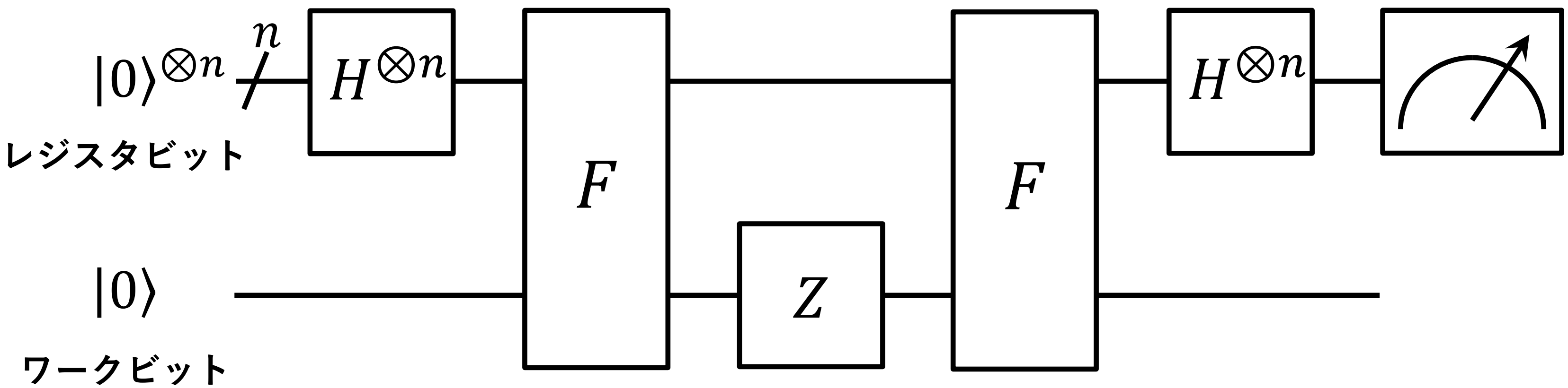
$|\Psi\rangle$

(常に1回)

"量子"問い合わせ

E. Schrödinger
(©Nobel Foundation)

ドイチェ・ジョザのアルゴリズム



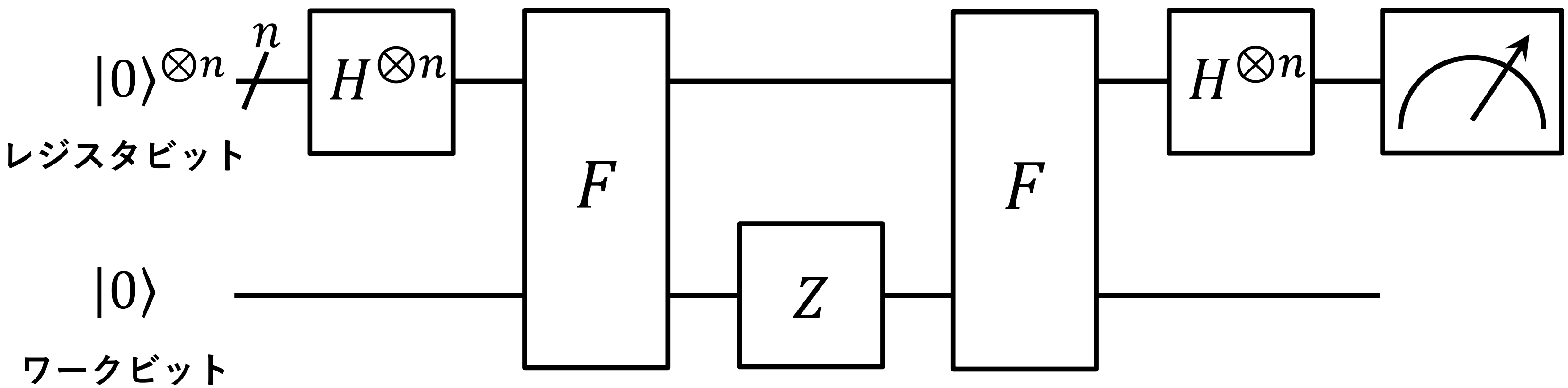
$$Z|a\rangle = (-1)^a|a\rangle$$

$$|0\rangle^{\otimes n}|0\rangle \xrightarrow{(H^{\otimes n}) \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle|0\rangle \xrightarrow{F} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle|f(x)\rangle$$

$$\xrightarrow{(I^{\otimes n}) \otimes Z} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)}|x\rangle|f(x)\rangle$$

$f(x)$の情報を**位相**に書き込む

ドイチェ・ジョザのアルゴリズム



$$Z|a\rangle = (-1)^a|a\rangle$$

$f(x)$の情報をワークビットから**消去**

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}|x\rangle|f(x)\rangle \xrightarrow{F} \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}|x\rangle|0\rangle$$

$$\xrightarrow{(H^{\otimes n})\otimes I} \sum_y \left(\sum_x \frac{(-1)^{f(x)+x\cdot y}}{2^n}\right)|y\rangle|0\rangle$$

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_y (-1)^{x\cdot y}|y\rangle$$

ドイチェ・ジョザのアルゴリズム

レジスタビットが$|0\rangle^{\otimes n}$に戻る確率振幅

$$\sum_{x=0}^{2^n-1} \frac{(-1)^{f(x)+x\cdot 0}}{2^n} = \begin{cases} \pm 1 & \text{(constant)} \\ 0 & \text{(balanced)} \end{cases}$$

***n* = 2, constant**

干渉による強め合い

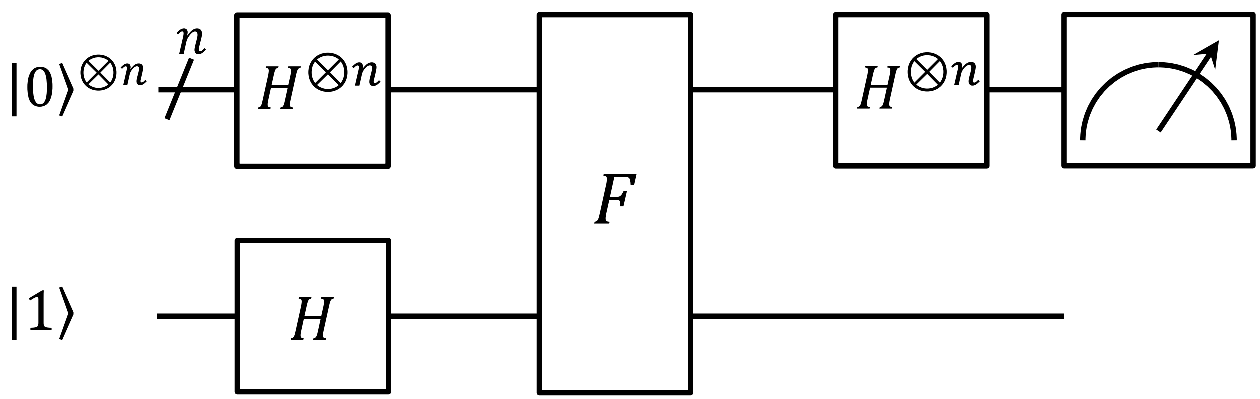
$$\sum_{x=0}^{3} \frac{(-1)^{f(x)}}{2^n} = \frac{(-1)^0 + (-1)^0 + (-1)^0 + (-1)^0}{4} = 1$$

***n* = 2, balanced**

干渉による弱め合い

$$\sum_{x=0}^{3} \frac{(-1)^{f(x)}}{2^n} = \frac{(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^1 + (-1)^0}{4} = 0$$

改良版



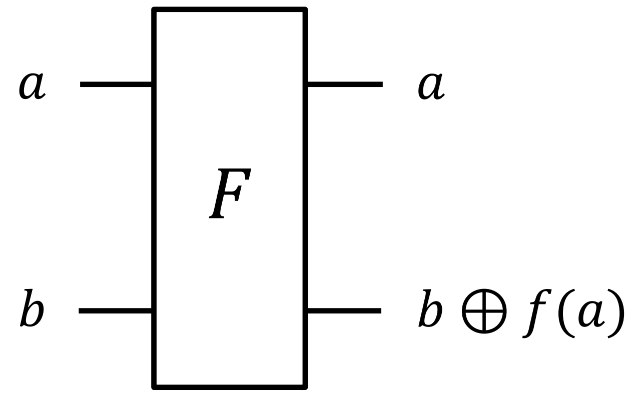
$$|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle = (-1)^{f(x)}(|0\rangle - |1\rangle)$$

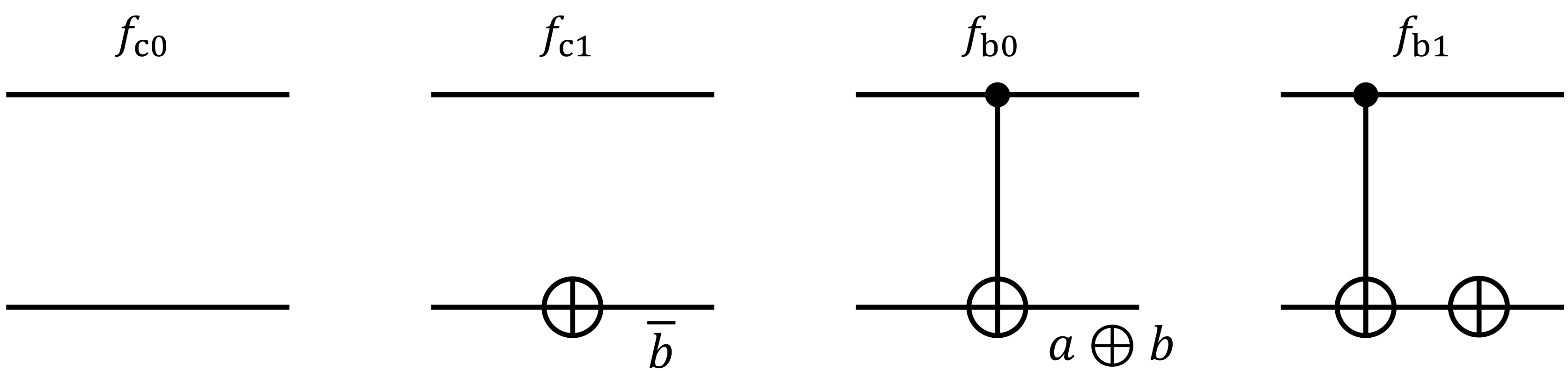
$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_x |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \xrightarrow{F} \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_x (-1)^{f(x)}|x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\xrightarrow{(H^{\otimes n}) \otimes I} \sum_{x,y} \frac{(-1)^{f(x)+x\cdot y}}{2^n}|y\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

1ビットのFゲート

a	constant		balanced	
	f_{c0}	f_{c1}	f_{b0}	f_{b1}
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0





NOTゲート　　制御NOTゲート

量子コンピューティングの難しさ

- 量子情報を**位相**に書き込み、**量子干渉**により解の状態を抜き出す
  → 計算中に**位相コヒーレンス**を保つことが必要

- 量子状態は**複製できない**(任意の状態$|\phi\rangle$に対して$U|\phi\rangle|0\rangle = |\phi\rangle|\phi\rangle$となるユニタリ演算子$U$は存在しない)
  → **量子誤り訂正符号 & 誤り耐性量子計算**

(フォールトトレラント, fault tolerant)

参考書

- M. A. Nielsen & I. L. Chuang (2000)
  - “**Quantum Computation and Quantum Information**”

- Keisuke Fujii (2015)
  - “**Quantum Computation with Topological Codes: From Qubit to Topological Fault-Tolerance**” (arXiv:1504.01444)

- **量子コンピュータ授業**
  - https://www.youtube.com/playlist?list=PLB1324F2305C028F7
  - http://www.appi.keio.ac.jp/Itoh_group/abe/