

# 量子情報基礎

阿部 英介

慶應義塾大学 先導研究センター

応用物理情報特別講義A

2016年度春学期後半 金曜4限@14-202

**“Information is physical.”**

**— Rolf Landauer**

**“It from bit.”**

**— John Wheeler**

**“I think there is a world market  
for maybe five computers.”**

**— Thomas Watson**

# 講義内容

- **量子ビットと1量子ビットゲート**
- **2量子ビットゲートと量子もつれ**
- **量子計算とデコヒーレンス**

(注)本講義では最低限の用語の概念の説明のみなので、本格的に量子計算に興味にある方は次ページの参考書を精読して下さい。

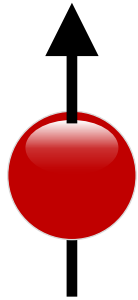
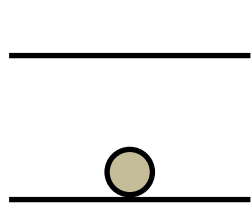
# 参考書

- M. A. Nielsen & I. L. Chuang (2000)
  - **“Quantum Computation and Quantum Information”** (邦訳あり)
- Keisuke Fujii (2015)
  - **“Quantum Computation with Topological Codes: From Qubit to Topological Fault-Tolerance”**
  - arXiv:1504.01444
- **量子コンピュータ授業**
  - <https://www.youtube.com/playlist?list=PLB1324F2305C028F7>
  - [http://www.appi.keio.ac.jp/Itoh\\_group/abe/](http://www.appi.keio.ac.jp/Itoh_group/abe/)

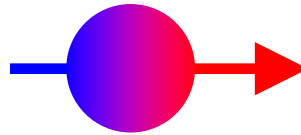
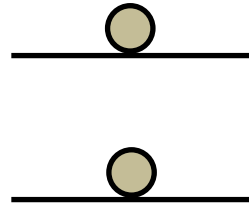
# 講義内容

- **量子ビットと1量子ビットゲート**
- 2量子ビットゲートと量子もつれ
- 量子計算とデコヒーレンス

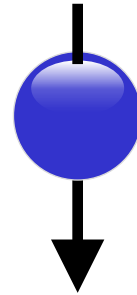
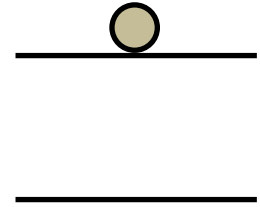
# 量子ビット



$$|g\rangle \equiv |0\rangle$$



$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$



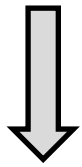
$$|e\rangle \equiv |1\rangle$$

重ね合わせ

# 量子ビット

**定義: 計算基底のベクトル表示**

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \langle 0|0\rangle = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$



$$\langle 1|0\rangle = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

**公準: 許される状態はヒルベルト空間内**

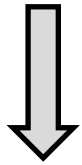
$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad \alpha, \beta \in \mathcal{C}$$

# ブロッホ球

## 1量子ビットの状態の記述

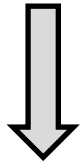
$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$



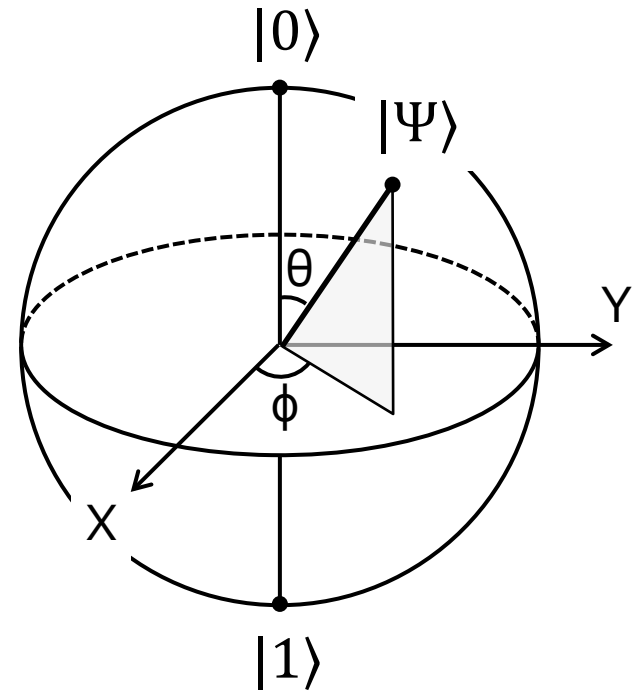
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$|\Psi\rangle = \underline{e^{i\gamma}} \left( \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right)$$

測定に影響しない



$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

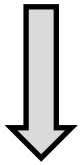




# ブロッホ球

## 1量子ビットの状態の記述

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

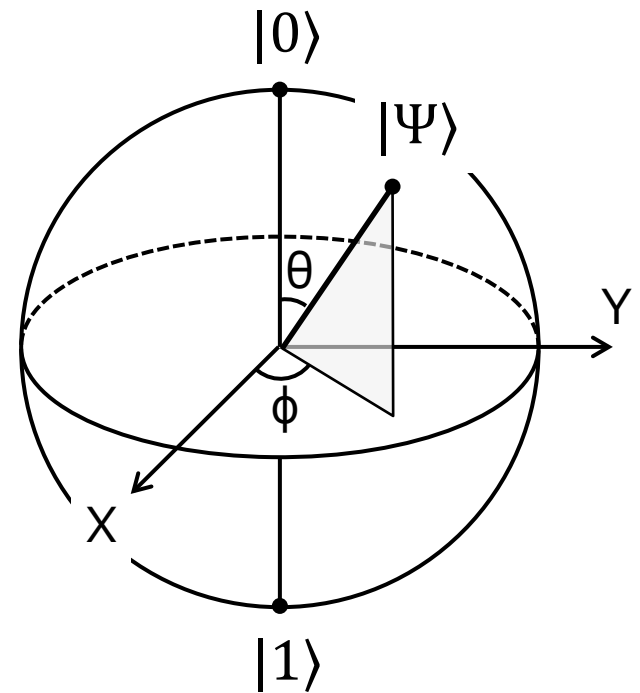


例: Z軸上( $\theta = 0, \pi$ )

$$|0\rangle, |1\rangle$$

例: X, Y軸上( $\theta = \pi/2, \phi = 0, \pi, \pm\pi/2$ )

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle)$$

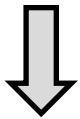


# ユニタリ発展

定義: エルミート共役  $A^\dagger = (A^T)^*$   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$

定義: 自己共役  $A = A^\dagger$

定義: ユニタリ  $UU^\dagger = I$



公準: 量子状態の時間発展はユニタリ

シュレディンガー方程式の解

$$|\Psi(t + \Delta t)\rangle = \exp\left(-\frac{iH\Delta t}{\hbar}\right) |\Psi(t)\rangle$$

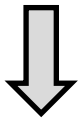
ハミルトニアン $H$ を指数演算子化した $e^{iH}$ はユニタリ

# ユニタリ発展

定義: エルミート共役  $A^\dagger = (A^T)^*$   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$

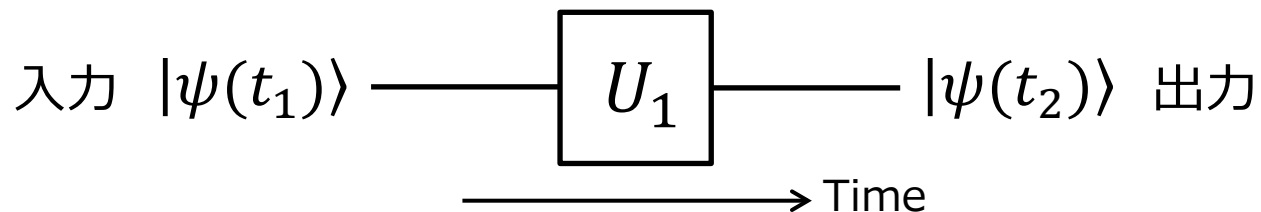
定義: 自己共役  $A = A^\dagger$

定義: ユニタリ  $UU^\dagger = I$



公準: 量子状態の時間発展はユニタリ

$$|\psi(t_2)\rangle = U_1 |\psi(t_1)\rangle$$

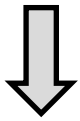


# ユニタリ発展

定義: エルミート共役  $A^\dagger = (A^T)^*$   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$

定義: 自己共役  $A = A^\dagger$

定義: ユニタリ  $UU^\dagger = I$

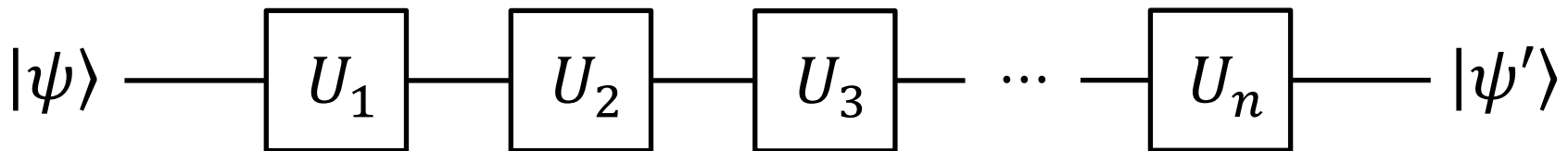


公準: 量子状態の時間発展はユニタリ

$$|\psi(t_2)\rangle = U_{12}|\psi(t_1)\rangle$$

$$U_n \cdots U_2 U_1 |\psi\rangle$$

||



1量子ビットゲート列(量子回路)

# パウリゲート

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \longrightarrow \boxed{\sigma_i} \longrightarrow \alpha(\sigma_i|0\rangle) + \beta(\sigma_i|1\rangle)$$

## パウリ行列

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

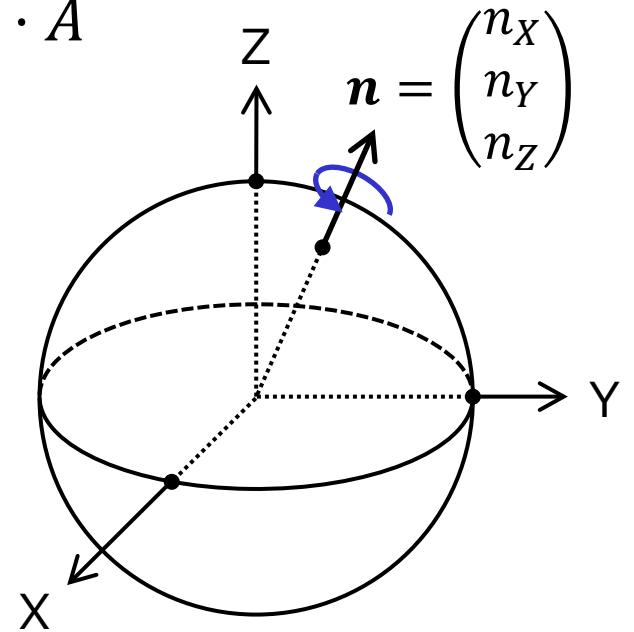
$$\sigma_i^2 = I \quad [\sigma_i, \sigma_{i+1}] = 2i\sigma_{i+2} \quad \{\sigma_i, \sigma_{i+1}\} = 0$$

# 回転ゲート

## 指数演算子

$$e^{iAx} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iAx)^n}{n!} = \cos x \cdot I + i \sin x \cdot A$$

$\uparrow$   
 $A^2 = I$



## 任意の軸周りの回転

$$R_{\mathbf{n}}(\varphi) \equiv e^{-i\varphi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2}$$
$$= \cos \frac{\varphi}{2} \cdot I - i \sin \frac{\varphi}{2} (n_X \sigma_X + n_Y \sigma_Y + n_Z \sigma_Z)$$

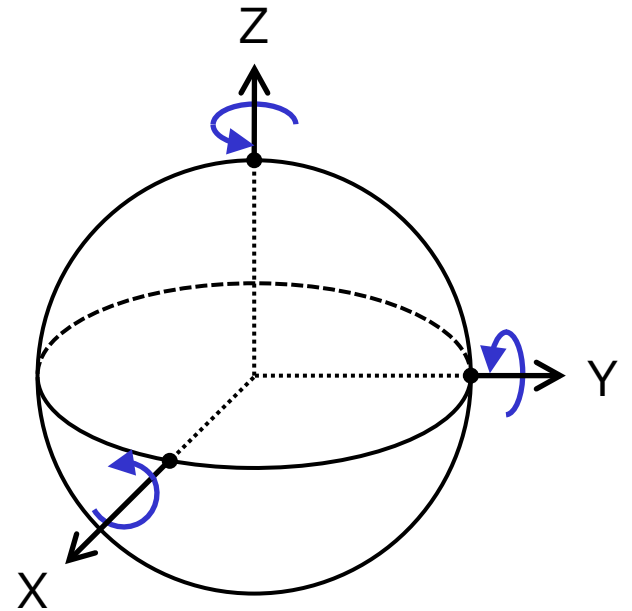
# 回転ゲート

## X,Y,Z軸周りの回転

$$R_X(\varphi) \equiv e^{-i\varphi\sigma_X/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_Y(\varphi) \equiv e^{-i\varphi\sigma_Y/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_Z(\varphi) \equiv e^{-i\varphi\sigma_Z/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$



# ZX分解

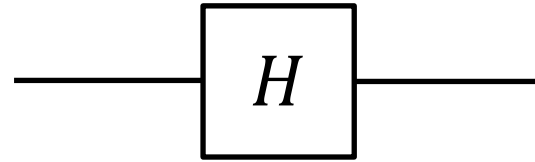
任意のユニタリ行列はX軸とZ軸の回転の組み合わせで実現

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos \frac{\gamma}{2} & -ie^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \sin \frac{\gamma}{2} \\ -ie^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)} \sin \frac{\gamma}{2} & e^{i(\alpha+\beta/2+\delta/2)} \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \\ &= e^{i\alpha} \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -i \sin \frac{\gamma}{2} \\ -i \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix} \\ &= e^{i\alpha} R_Z(\beta) R_X(\gamma) R_Z(\delta) \end{aligned}$$

(分解の仕方は一意ではない)



# アダマールゲート



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

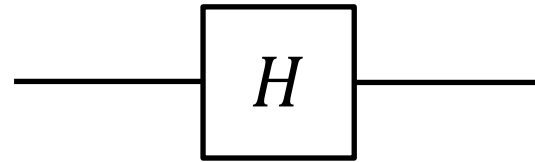
## 基底の変換

$$|0\rangle \xleftrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \equiv |+\rangle \quad |1\rangle \xleftrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \equiv |-\rangle$$

$$\langle +|+\rangle = \frac{1}{2} (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle +|-\rangle = \frac{1}{2} (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

# アダマールゲート



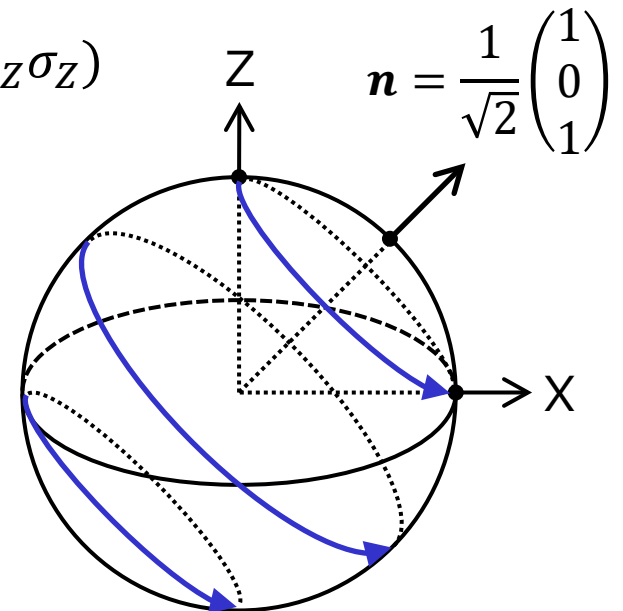
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}$$

## $n$ 軸周りの回転

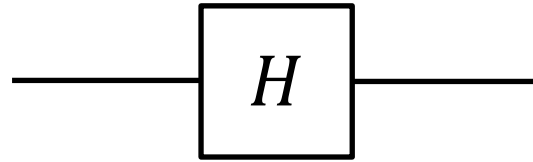
$$R_n(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot I - i \sin \frac{\varphi}{2} (n_x \sigma_X + n_y \sigma_Y + n_z \sigma_Z)$$

↓  $\varphi = \pi \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$R_n(\pi) = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\sigma_X + \sigma_Z) \approx H$$



# アダマールゲート



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

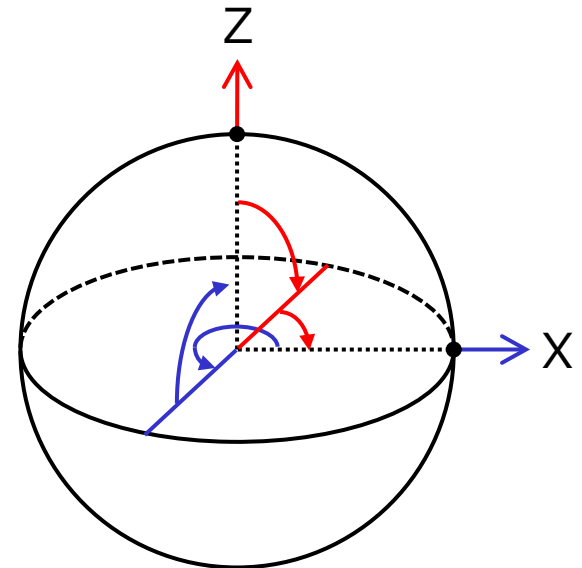
**ZX分解**

$$H = e^{i\frac{\pi}{2}} R_Z \left( -\frac{\pi}{2} \right) R_X \left( -\frac{\pi}{2} \right) R_Z \left( \frac{3\pi}{2} \right)$$

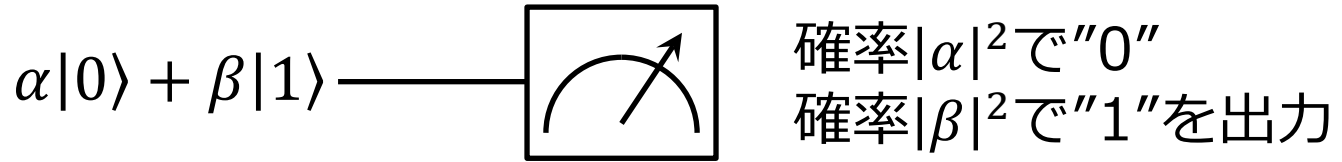
$$= \begin{pmatrix} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})} \cos \frac{\pi}{4} & ie^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4})} \sin \frac{\pi}{4} \\ ie^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})} \sin \frac{\pi}{4} & e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4})} \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i \cdot 0} & ie^{i\frac{3\pi}{2}} \\ ie^{-i\frac{\pi}{2}} & e^{i\pi} \end{pmatrix}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left( \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

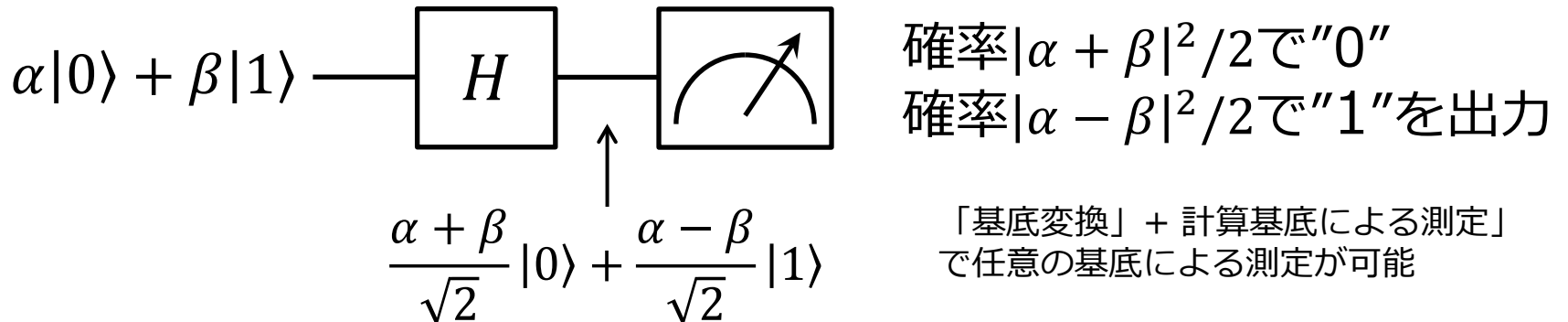
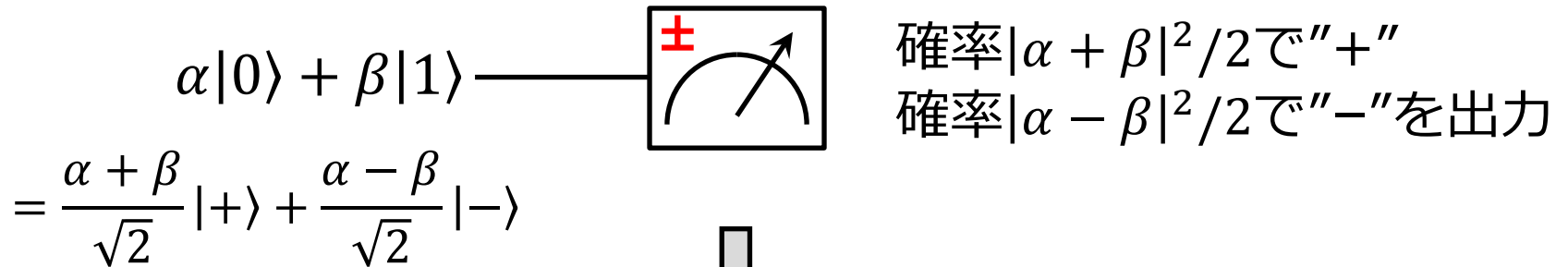


# 測定



(注)「計算基底による測定を行う」測定器

## ±基底での測定



「基底変換」+ 計算基底による測定  
で任意の基底による測定が可能

# 講義内容

- 量子ビットと1量子ビットゲート
- **2量子ビットゲートと量子もつれ**
- 量子計算とデコヒーレンス

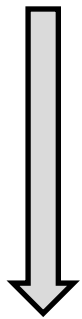
# 複数量子ビット

## 2量子ビットの状態の記述

$$|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$$

## 公準: 複合系の状態はテンソル積で表される



(注)2量子ビットの状態の計算基底は4つ

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 定義: テンソル積(行列表示)

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ a_2 \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

# 2量子ビット

## 2量子ビットの計算基底

$$|00\rangle = |0\rangle|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\rangle|1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

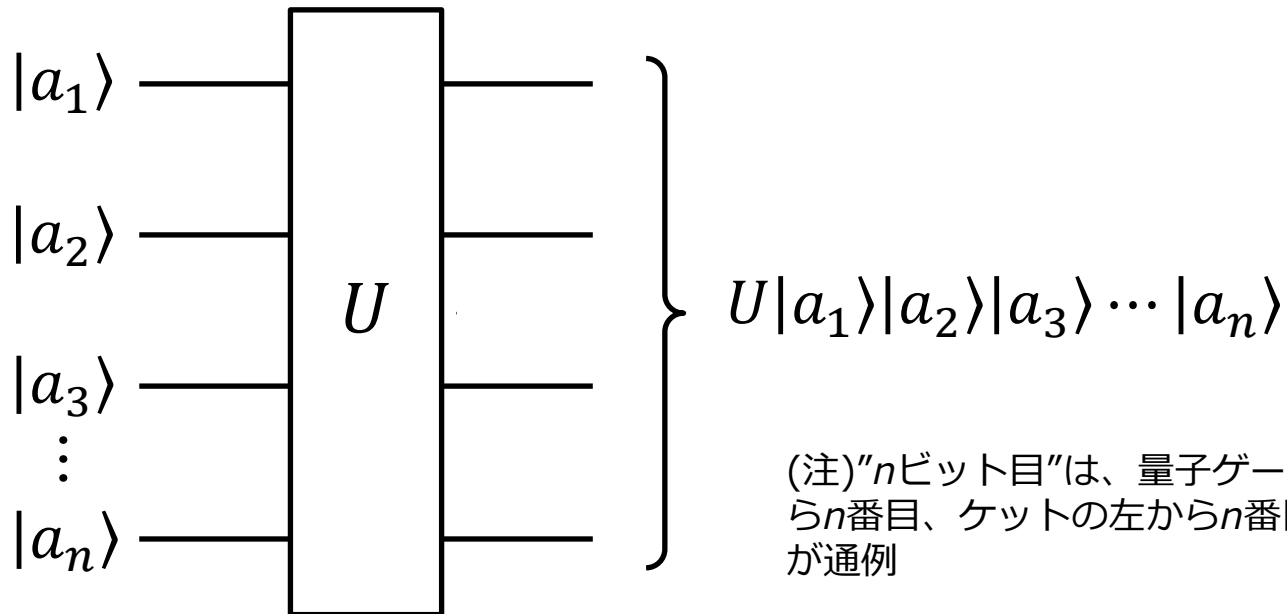
$$|10\rangle = |1\rangle|0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = |1\rangle|1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2量子ビット状態

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

# 複数量子ビットゲート



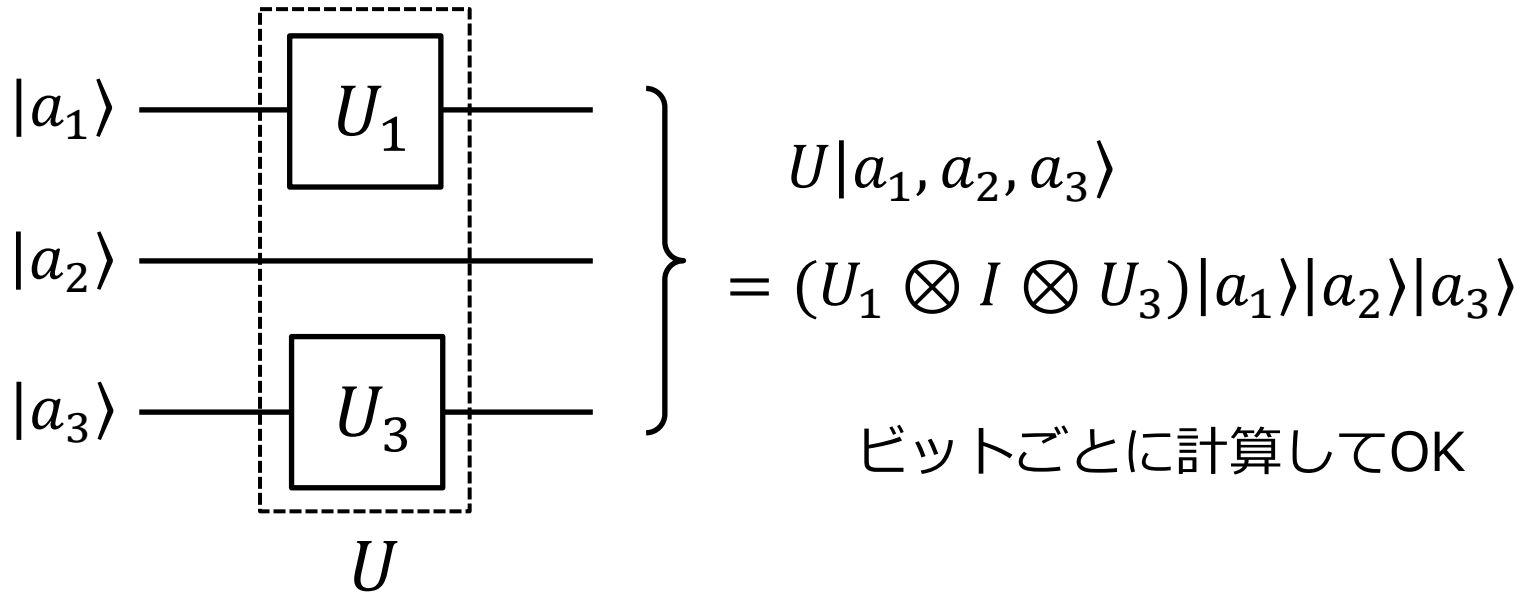
(注)" $n$ ビット目"は、量子ゲートでは上から $n$ 番目、ケットの左から $n$ 番目を指すのが通例

$|a_1\rangle|a_2\rangle|a_3\rangle\cdots|a_n\rangle$  :  $2^n$ 次元の状態ベクトル

$U$  :  $2^n \times 2^n$ のユニタリ行列



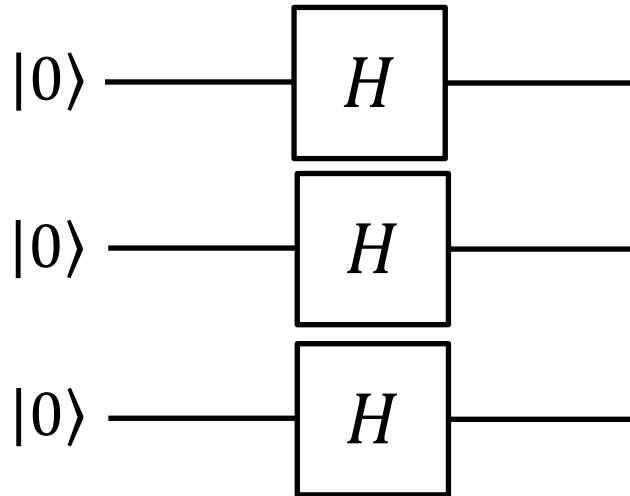
# 複数量子ビットゲート



**定義: テンソル積(行列表示)**

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \times B & a_3 \times B \\ a_2 \times B & a_4 \times B \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_3 & a_3 b_1 & a_3 b_3 \\ a_1 b_2 & a_1 b_4 & a_3 b_2 & a_3 b_4 \\ a_2 b_1 & a_2 b_3 & a_4 b_1 & a_4 b_3 \\ a_2 b_2 & a_2 b_4 & a_4 b_2 & a_4 b_4 \end{pmatrix}$$

# $n$ 量子ビットの重ね合わせ

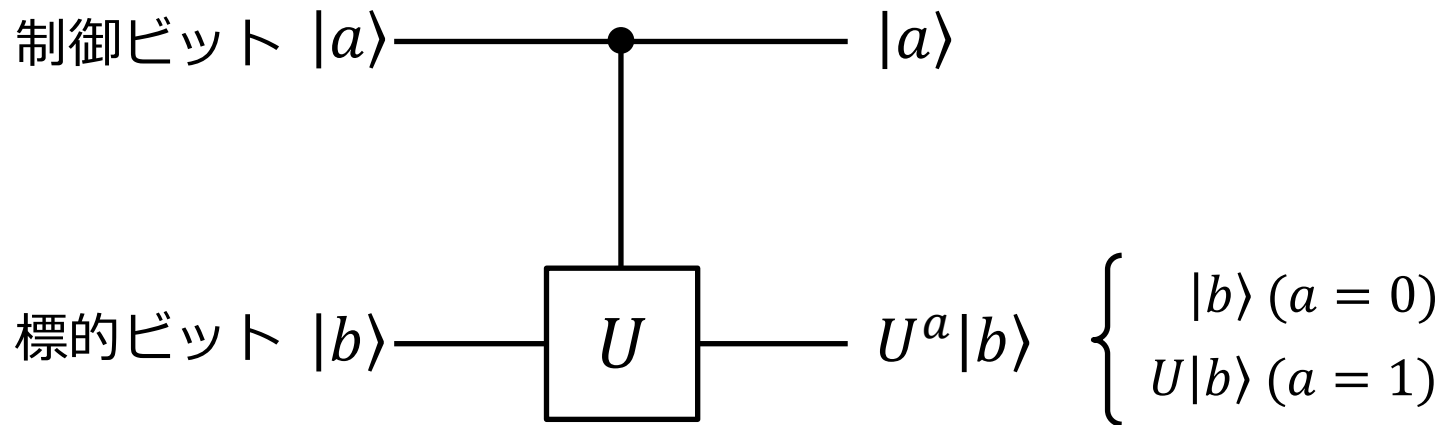


$$\begin{aligned} H^{\otimes 3}|000\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^3}} (|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^3}} (|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle \\ &\quad |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) \end{aligned}$$

重ね合わせ状態を用いて並列計算が可能(高速?)

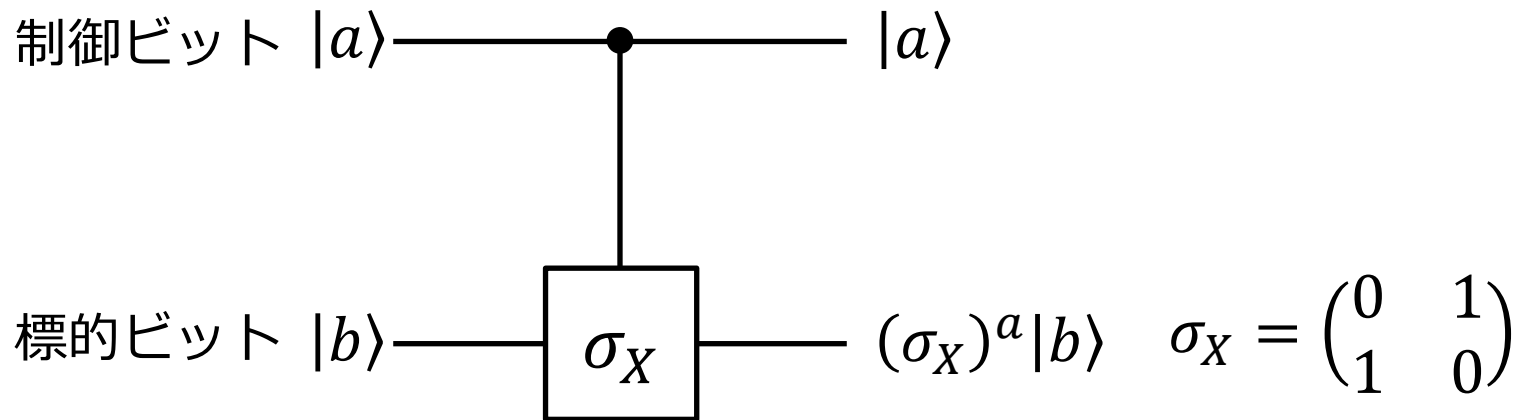
# 制御Uゲート

制御ビットの状態に応じて標的ビットにUが作用



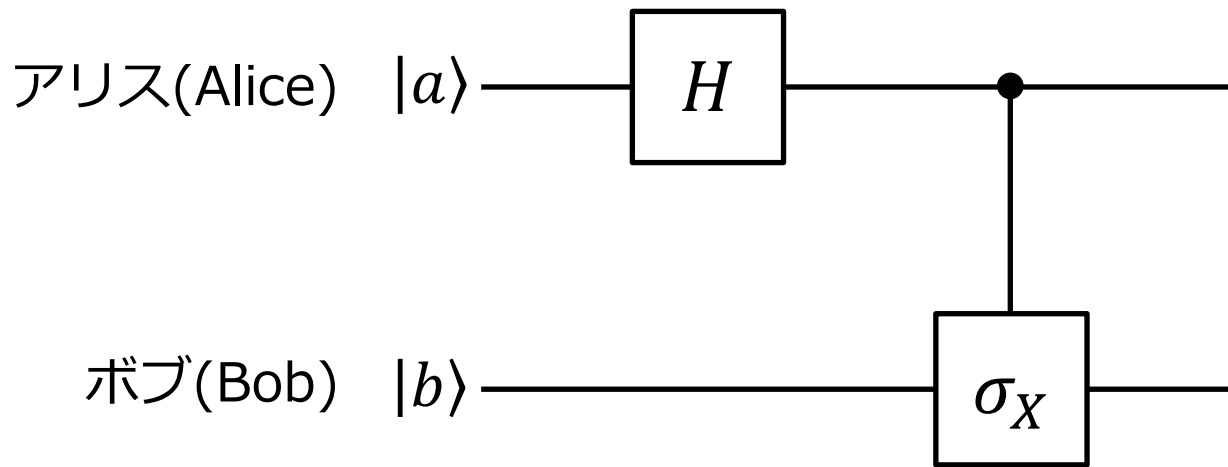
# 制御NOTゲート

制御ビットが1のとき標的ビットを反転



$$\begin{aligned} \text{CNOT}|00\rangle &= |00\rangle \\ \text{CNOT}|01\rangle &= |01\rangle \\ \text{CNOT}|10\rangle &= |11\rangle \\ \text{CNOT}|11\rangle &= |10\rangle \end{aligned} \iff \text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# ベル状態



$$\begin{array}{l} |0\rangle|0\rangle \\ |1\rangle|0\rangle \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle)|0\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle \pm |1\rangle|1\rangle)$$

$$\begin{array}{l} |0\rangle|1\rangle \\ |1\rangle|1\rangle \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle)|1\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle \pm |1\rangle|0\rangle)$$

計算基底

ベル基底

# 量子もつれ

(Entanglement)

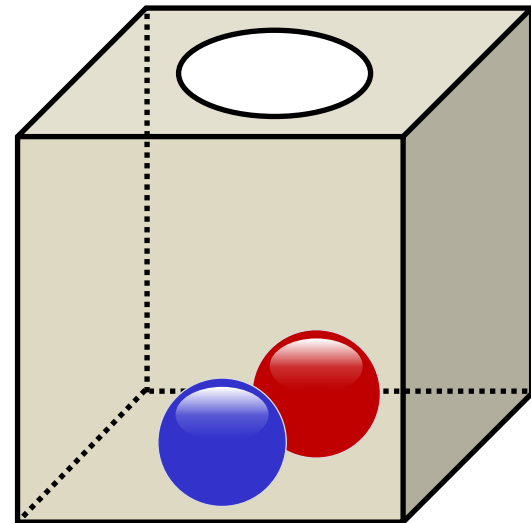
## ベル状態

$$|\Phi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B)$$

アリスが"0"を得るとボブは"1"、  
アリスが"1"を得るとボブは"0"

## 箱の中のボール

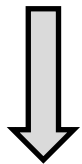
アリスが赤玉を得るとボブは青玉、  
アリスが青玉を得るとボブは赤玉



# 量子もつれ

## ベル状態

$$|\Phi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B)$$



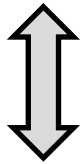
基底の変換  $\{|0\rangle, |1\rangle\} \leftrightarrow \{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2^3}} [(|+\rangle + |-\rangle)(|+\rangle - |-\rangle) - (|+\rangle - |-\rangle)(|+\rangle + |-\rangle)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^3}} (|+\rangle|+\rangle + |-\rangle|+\rangle - |+\rangle|-\rangle - |-\rangle|-\rangle \\ &\quad - |+\rangle|+\rangle + |-\rangle|+\rangle - |+\rangle|-\rangle + |-\rangle|-\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\rangle_A |+\rangle_B - |+\rangle_A |-\rangle_B) \end{aligned}$$

# 量子もつれ

## ベル状態

$$|\Phi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B)$$



$$|\Phi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\rangle_A |+\rangle_B - |+\rangle_A |-\rangle_B)$$

- もつれた状態は基底を変えても、もつれている
- アリスとボブが異なる基底で測定すると相関はない(例: アリスが計算基底で"0"を得たのち、ボブが±基底で測定を行うと"+"も"- "も50%の確率で得られる)

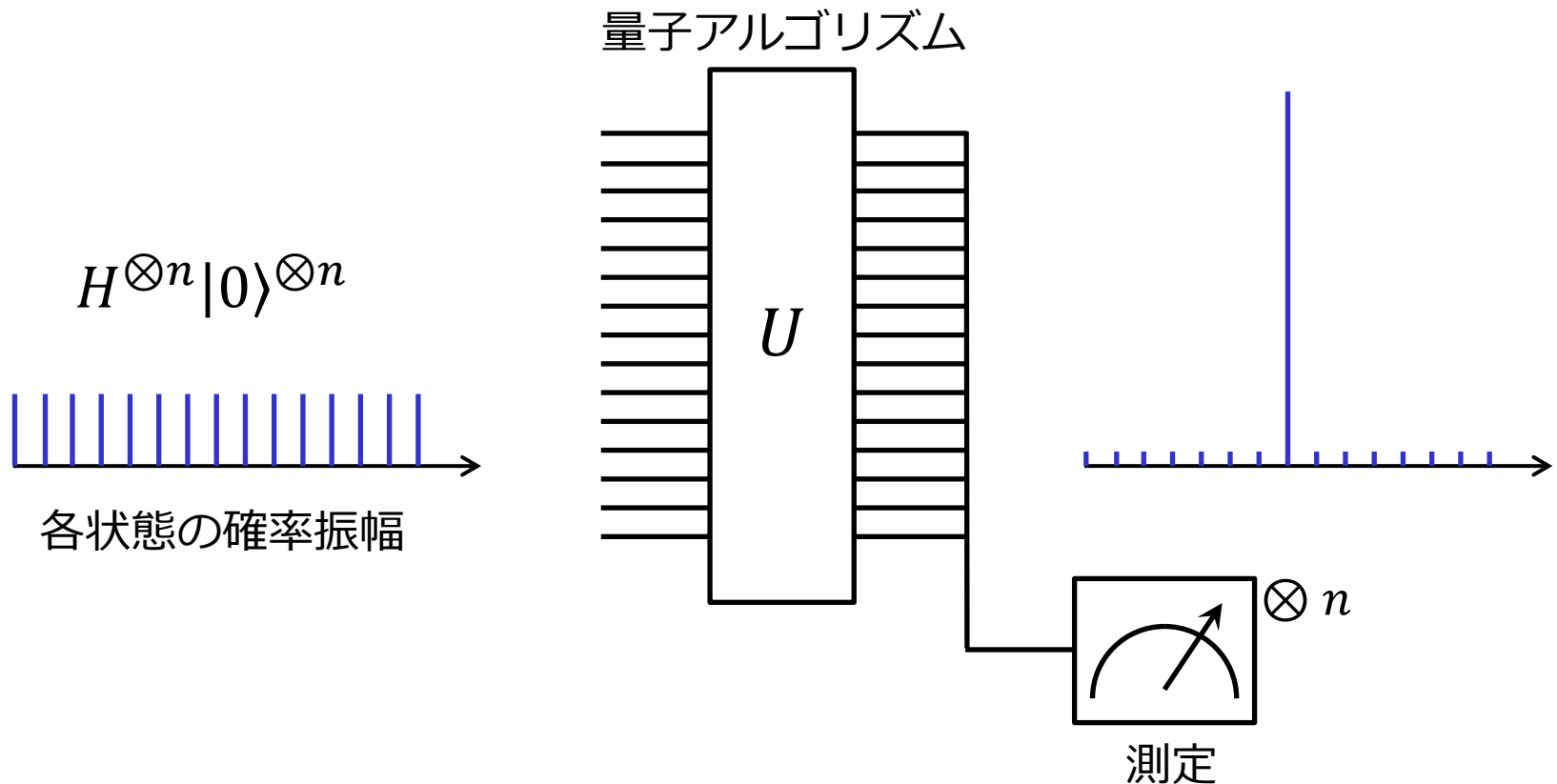


# 講義内容

- 量子ビットと1量子ビットゲート
- 2量子ビットゲートと量子もつれ
- **量子計算とデコヒーレンス**

# 量子計算のアイデア

- 重ね合わせ状態から始めて、解の状態の確率振幅が大きくなるよう(量子干渉)にアルゴリズムを実行して、測定を行う
- アルゴリズム: ドイチェ・ジョザ、グローバー、ショアなど



# ユニバーサル量子ゲート

- **1量子ビットゲートとCNOT**

- 1量子ビットゲートとCNOTさえ実現できれば、ほかの全ての $n$ 量子ビットゲートはその組み合わせで実行可能

- **$H, S, T$ とCNOT**

- 耐故障性(fault tolerance)を付与できる

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

# 密度行列

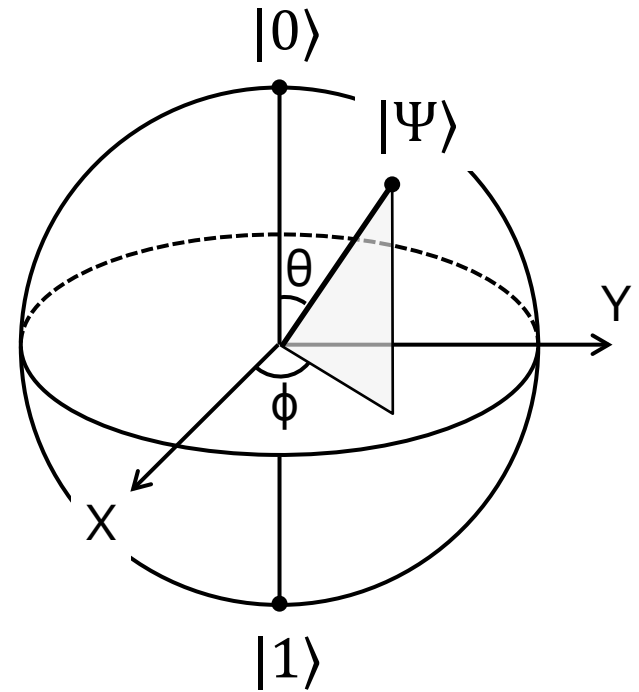
純粹狀態 ( $|\mathbf{r}| = 1$ )

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_X \\ r_Y \\ r_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \end{pmatrix}$$

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\langle\Psi| = (\alpha^* \quad \beta^*) = \left( \cos\frac{\theta}{2} \quad e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \right)$$



# 混合状態

ブロッホ球の内側 ( $|r| < 1$ )

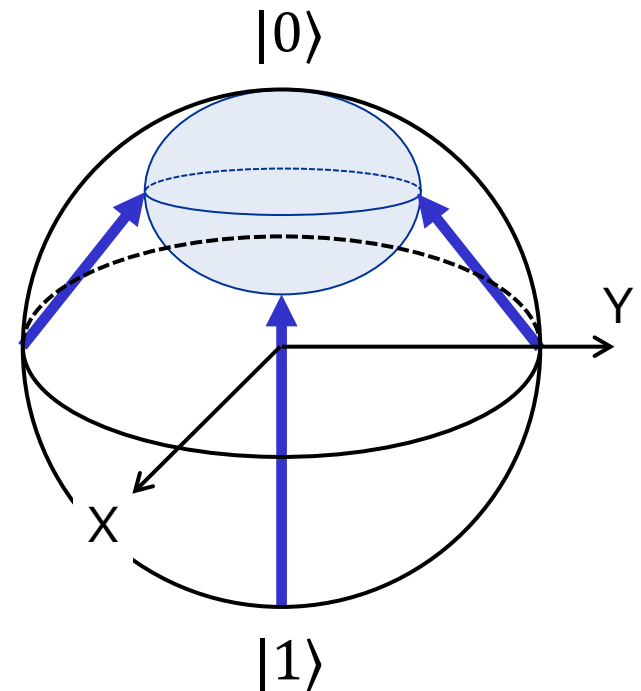
$$\rho(t) = \frac{I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

純粋状態(!)

エネルギー緩和( $T_1$ )

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_X e^{-t/2T_1} \\ r_Y e^{-t/2T_1} \\ r_Z e^{-t/T_1} + 1 - e^{-t/T_1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

非ユニタリ過程から純粋状態を生成する  
(リザーブエンジニアリング)



# デコヒーレンス( $T_2$ )

## 環境との結合

$$|0\rangle_s |E\rangle_e \xrightarrow{U(t)} |0\rangle_s |E_0(t)\rangle_e \quad |1\rangle_s |E\rangle_e \xrightarrow{U(t)} |1\rangle_s |E_1(t)\rangle_e$$

## 環境との量子もつれ

$$|\Psi(0)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|E\rangle \\ \xrightarrow{U(t)} |\Psi(t)\rangle = \alpha|0\rangle|E_0(t)\rangle + \beta|1\rangle|E_1(t)\rangle$$

## 縮約密度行列

$$\rho_s(t) = \text{Tr}_e(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^*\langle E_0|E_1\rangle \\ \alpha^*\beta\langle E_0|E_1\rangle & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

多くの場合  $\langle E_0(t)|E_1(t)\rangle = e^{-t/T_2}$

系の情報(**which-path information**)が環境へ漏れ出る

# デコヒーレンス( $T_2$ )

## ブロッホ球での描像

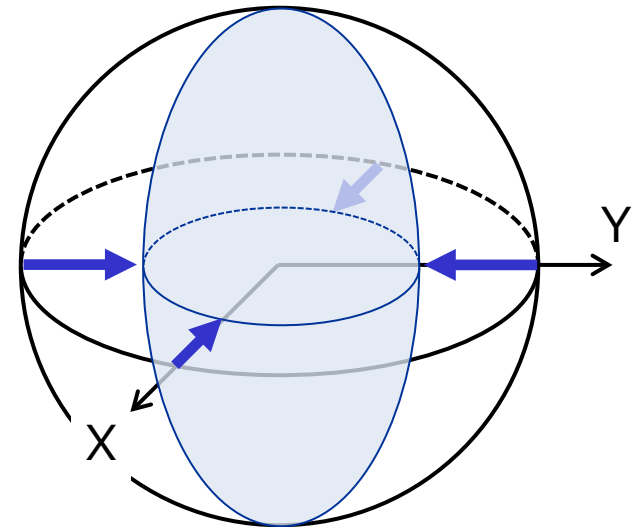
混合状態

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* e^{-t/T_2} \\ \alpha^*\beta e^{-t/T_2} & |\beta|^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

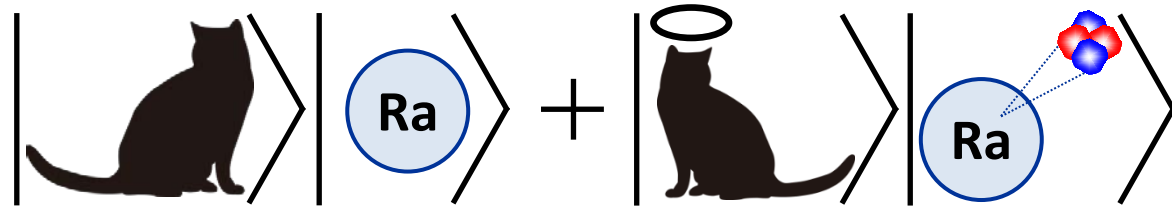
“0かつ1”の状態

“0または1”の状態

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_X e^{-t/T_2} \\ r_Y e^{-t/T_2} \\ r_Z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_Z \end{pmatrix}$$



# シュレディンガーの猫



© Google

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{alive}\rangle|0\rangle + |\text{dead}\rangle|1\rangle)$$



$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2} (|\text{alive}, 0\rangle\langle\text{alive}, 0| + |\text{dead}, 1\rangle\langle\text{dead}, 1| \\ + |\text{alive}, 0\rangle\langle\text{dead}, 1| + |\text{dead}, 1\rangle\langle\text{alive}, 0|)$$

猫のwhich-path information(体温、心音など)が環境へ漏れることで生きた猫と死んだ猫の間のコヒーレンスが失われる

(注)「猫の基底」とは何だろうか?



# ディビンチェンゾの要請

- **量子計算の要素技術**

1. スケーラブルな量子ビット列
2. 初期化
3. ユニバーサル量子ゲート
4. 長いコヒーレンス時間
5. 射影測定

- **量子通信の要素技術**

6. 物質量子ビットと飛行量子ビットの接続
7. 遠隔地間での飛行量子ビットのやり取り

# 参考書

- M. A. Nielsen & I. L. Chuang (2000)
  - **“Quantum Computation and Quantum Information”** (邦訳あり)
- Keisuke Fujii (2015)
  - **“Quantum Computation with Topological Codes: From Qubit to Topological Fault-Tolerance”**
  - arXiv:1504.01444
- **量子コンピュータ授業**
  - <https://www.youtube.com/playlist?list=PLB1324F2305C028F7>
  - [http://www.appi.keio.ac.jp/Itoh\\_group/abe/](http://www.appi.keio.ac.jp/Itoh_group/abe/)